ИНФОРМАТИКА, ВЫЧИСЛИТЕЛЬНАЯ ТЕХНИКА И УПРАВЛЕНИЕ

УДК 539.182

О ГЕНЕАЛОГИЧЕСКОМ ДРЕВЕ КВАНТОВЫХ СОСТОЯНИЙ В ТОРИЧЕСКОЙ ПРОЕКТИВНОЙ ГЕОМЕТРИИ

ON THE GENEALOGICAL TREE OF QUANTUM STATES IN TORIC PROJECTIVE GEOMETRY

Геннадий Германович Волков
доктор физико-математических наук, профессор
старший научный сотрудник
МОУ «ИИФ»
Адрес: 142210, Московская обл.,
г. Серпухов, Большой Ударный пер., д. 1а
Тел.: +7(4967)35-31-93
E-mail: gennadii.volkov@rambler.ru

Сергей Владимирович Смуров
почетный работник науки и техники РФ
доктор технических наук, профессор
Первый Вице-президент Института – Главный конструктор
Адрес: 142210, Московская обл.,
г. Серпухов, Большой Ударный пер., д. 1а
Тел.: +7(4967)35-31-93
E-mail: Svs_iif@mail.ru

Александр Альбертович Масликов
кандидат физико-математических наук, доцент
заведующий комплексной лабораторией физики
Филиал «Протвино»
Государственного университета «Дубна»
Адрес: 142281, Московская обл.,
г. Протвино, Северный проезд, д. 9
Тел.: +7 (4967) 31-01-92
E-mail: masspref@yandex.ru

Аннотация

Мир чистых и смешанных многоуровневых квантовых состояний, кубитов, кутритов,...,кудитов, напрямую связан с проективными комплексными пространствами CP^n и проективными алгебраическими подмногообразиями (смешанные состояния). Теория торических многообразий позволяет не только подойти к описанию топологических свойств огромного класса этих пространств (много-кудитных N состояний) и подмногообразий, но открывает явные алгебраические и геометрические связи между пространствами и подмногообразиями различных размерностей. Именно единение алгебраического и торического подходов позволило построить мультинарную универсальную алгебру проективных рефлексивных весов, законы композиции которой связывают все размерности огромной совокупности унитарных проективных и квазипроективных пространств (состояний) и соответствующих алгебраических подмногообразий, классифицируя их по неприводимым представлениям. Важность применения этой универсальной алгебры в рамках торической проективной геометрии к квантовой теории информации заключается в новых возможностях исследования всех возможностей квантового запутывания в многокубитных $CP^1 \times CP^1 \times \ldots \times CP^1$ состояниях, так и алгебраических и топологических структур многоуровневых квантовых состояний – CP^n кутритов CP^2, квартитов CP^3 и т.д кудитов CP^n. и соответственно создания гибридных многоуровневых запутанных квантовых систем для квантовой телепортации и квантовых компьютеров.

Ключевые слова: кубит, кутрит, кудит, торическая геометрия, проективные пространства, многообразия, квантовая информация, рефлексивные алгебры, унитарность, группа голономии, графы Бергера, пространства Калаби-Яу.

Summary

The world of pure and mixed multilevel quantum states, qubits, qutrites,..,qudits, is directly related to projective complex spaces CP^n and projective algebraic subvarieties (mixed states). The theory of toric varieties allows us not only to approach the description of the topological properties of a huge class of these spaces (many-qudit N states) and subvarieties, but also reveals explicit algebraic and geometric connections between spaces and subvarietiess of different dimensions. It is the combination of the algebraic and toric approaches that made it possible to construct a multidimensional universal algebra of projective reflexive weights, the composition laws of which connect all dimensions of a huge collection of unitary projective and quasi-projective spaces (states) and corresponding algebraic subvarieties, classifying them according to irreducible representations. The importance of this universal algebra within the framework of toric projective geometry of the applications to the quantum information theory lies in the new possibilities of investigating all the possibilities of quantum entanglement in multi-qubit $CP^1 \times CP^1 \times \ldots \times CP^1$ states, as well as algebraic and topological structures of multilevel quantum states – CP^2 qutrites, CP^3 quartites, etc. CP^n qudits. and, accordingly, the creation of hybrid multilevel entangled quantum systems for quantum teleportation and quantum computers.

Keywords: qubit, qutrit, qudit, toric geometry, projective spaces, varieties, quantum information, reflexive algebras, unitarity, holonomy group, Berger graphs, Calabi-Yau spaces.

ИНФОРМАТИКА,
ВЫЧИСЛИТЕЛЬНАЯ ТЕХНИКА И УПРАВЛЕНИЕ

Введение

Квантовая запутанность является ресурсом так же, как и столь ж абстрактное понятие энергии. Квантовая запутанность является ресурсом, который позволяет совершать такие, казалось бы, невозможные вещи, как квантовую криптографию и квантовые вычисления – квантовый компьютер или квантовую телепортацию. Обычные модели квантового компьютера используют замкнутые системы из m кубитов и имеют дело только с унитарными вентилями в чистых состояниях. Чистое состояние m двухуровневых замкнутых квантовых систем является элементом 2^m-мерного гильбертова пространства и позволяет реализовать модель квантового компьютера с двузначной логикой. Запутанность в многочастичных связанных системах является важным ресурсом для многих проблем квантовой информатики, но ее количественное описание довольно сложная задача. Многомерные запутанные состояния интересны как для изучения основ квантовой механики, так и для актуальности разработки новых протоколов для квантовой коммуникации. Создание и сохранение запутанности контролируемым образом также является основной проблемой для реализации квантовых компьютеров. Квантовая запутанность имеет самое прямое отношение к пониманию природы сознания человеческого мозга. Нейробиологические исследования в область коры, состоящей примерно из 100 миллиардов нейронов, которые по своей природе соединены в очень сложную сеть. Квантовые теории сознания основаны на моделировании квантовой нейронной сети со структурой микротрубочки. Они использовали чрезвычайно упрощенную модель димеров тубулина, где каждый димер был представлен просто как кубит, единая квантовая система с двумя состояниями. Расширение этой модели на n-мерное квантовые состояния, или n-кудиты, имеют большие перспективы в моделировании систем сознания человека. Известно, что пространство всех разрешенных в квантовой теории состояний намного богаче, чем пространство классических состояний, что следует немедленно из сравнения геометрии классических и квантовых пространств состояний. В квантовой установке множество состояний Ω_n, состоит из эрмитовых, положительных и нормированных матриц плотности. Кроме того для любых двух чистых состояний существуют преобразования, которые непрерывным путем соединяют два квантовых чистых состояния. Эти и другие факты являются ключевыми различиями между классической и квантовыми теориями. Сложность схемы эволюции системы квантовых кубитов как примитивной проблемы квантовых вычислений широко обсуждалась в литературе. Используя риманову геометрию, оптимальные квантовые схемы эквивалентны геодезическим эволюциям в специальной параметризации $SU(dm)$. Сложность квантовых схем для систем нескольких кубитов, а также для многоуровневых квантовых состояний, кутритов исследовалась с помощью различных подходов, среди которых надо выделить геометрический подход [1-4].

Чистые и смешанные многоуровневые квантовые состояния

Пространство состояний отдельного кубита – это 2-мерное векторное пространство $S^2 \approx S^3/S^1$, в котором 2-х уровневые векторы состояний $|\psi\rangle = z_0|0\rangle + z_1|1\rangle$, $\{z_0 = x_0 + iy_0,\ z_1 = x_1 + iy_1\} \in C^2$, а $\{|0\rangle, |1\rangle\}$ являются ортонормированными базисными векторами. Благодаря условию нормировки $|z_0|^2 + |z_1|^2 = 1$, вещественные параметры принадлежат 3-мерной сфере: $(x_0, y_0, x_1, y_2) \in S^3$. Так как векторы $|\psi\rangle$, отличающиеся только общим комплексным фактором $e^{i\varphi} \in S^1$, считаются одним и тем же состоянием. Это означает, что есть индивидуальное соответствие между множеством чистых состояний и множеством классов эквивалентности $(z_0, z_1) \in \lambda(z_0, z_1), \lambda \in C^* = C \backslash 0$. По определению это одномерное комплексное проективное пространство $CP^1(z_1 : z_2) = S^2$. Числа $(z_1 : z_2)$ известны как однородные координаты.

Пространство состояний m-кубитовой системы – это 2^m-мерное векторное пространство, образованное из тензорного произведения m копий комплексных проективных пространств CP^1 одиночных кубитов $CP^1 \times \ldots \times CP^1$. В случае 2-х уровневой системы Гильбертово пространство чистых состояний $CP^1 \times CP^1$ вложено в 3-х мерное комплексное проективное пространство CP^3: $CP^1 \times CP^1 \subset CP^3$. Замкнутая квантово-механическая система может быть смоделирована как векторное пространство с внутренним скалярным произведением – гильбертово пространство, в котором каждое состояние системы – это единичный вектор.

Состояния квантовой системы d-уровня находятся во взаимно однозначном соответствии с положительно полуопределенными операторами единичного следа в d-мерном гильбертовом пространстве H. В общем, квантовые системы не изолированы от окружающей среды, и тогда квантовая система не находится в чистом состоянии, в результате смешанное состояние описывается матрицей плотности. Матрица плотности ρ – это эрмитов ($\rho^\dagger = \rho$), положительный оператор $\rho \geq 0$ на H с единичным следом ($Tr\rho = 1$). Набор всех возможных операторов плотности системы d-уровня является ее пространством состояний Ω_d. Чистые состояния соответствуют следующему матричному условию $\rho^2=\rho$, которое эквивалентно условию $Tr\rho^2=1$. Чистое состояние представлено оператором $\rho=|\psi><\psi|$. Все остальные состояния являются смешанными. Из определения следует, что квантовое пространство состояний является выпуклым множеством. То есть выпуклая комбинация операторов плотности всегда приводит к оператору плотности: $\rho_j \in \Omega_d$, $j=0,1,..,l$ влечет $\Sigma_j p_j \rho_j \in \Omega_d$ для любого множества $\{p_j\}$ с $p_j>0$, $\Sigma_j p_j=1$.

Можно представить произвольный оператор матрицы плотности $\rho(t)$ для m-кубитов в терминах тензорных произведений единичной 2×2-матрицы σ_0 и 2×2- Паули σ_i, которые эрмитовы и унитарны, причем $\{\sigma_i/2,\ i=1,2,3\}$ порождают $su(2)$-алгебру Ли:

$$\rho(t)=\frac{1}{2^m}\sum_{\mu_1\ldots\mu_m}^{N}F_{\mu_1\ldots\mu_m}(t)\sigma_{\mu_1}\otimes\ldots\otimes\sigma_{\mu_m},$$

$$\sigma_1=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix},\sigma_2=\begin{pmatrix}0&-i\\i&0\end{pmatrix}\sigma_3=\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix},\sigma_0=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$$

где $F_0\ldots_0(t)=1$, $\mu_i\in\{0,1,2,3\}$, $i=1,\ldots,m$, $N=4^m$.

Кубит – самый простой пример множества двухуровневых квантовых состояний, которое геометрически представляется выпуклым трехмерным шаром. Чистые состояния находятся на его поверхности-сфере Блоха S^2, а сам шар представляет собой пространство всех состояний Ω_2 кубита, простейшего квантово-механического пространства состояний, которое можно разложить в этом базисе, как $\rho=1/2(\sigma_0+f_1\sigma_1+f_2\sigma_2+f_3\sigma_3)$, где коэффициенты разложения равны $f_i=Tr(\rho\cdot\sigma_i)$. Эти три числа действительны, поскольку матрица эрмитова. Трехмерный вектор $f=(f_1,f_2,f_3)$ называется вектором Блоха или вектором когерентности. Чистые состояния представлены проектором $\rho=\rho^2$. где коэффициенты f_i определяющие чистые состояния отождествляются со сферой Блоха $(f_1)^2+(f_2)^2+(f_3)^2=1$, а смешанные внутри нее – шар Блоха. Если вектор $f=0$, то имеем максимально смешанное состояние. Поскольку след матриц Паули равен нулю, коэффициент 1/2, стоящий перед единичной матрицей, гарантирует, что $Tr\rho=1$, и также надо убедиться, что все собственные значения неотрицательны.

Важность хорошего понимания геометрии Ω_d очевидна. Структура Ω_2 вместе с границей пространства состояний двухуровневой системы кубита проста: это шар и сфера Блоха. Но структура Ω_d, с его границей, обобщения шара и сферы Блоха, намного богаче при $d\geq3$ [1-5]. Когда $d>2$, пространство квантовых состояний больше не является шаром. Однако это всегда выпуклое множество. Для всех d любая матрица плотности может быть получена вращением классической вероятности симплекса вокруг максимально смешанного состояния, которое остается инвариантным относительно вращений. Однако при $d>2SU(d)$ является собственной подгруппой в $SO(d^2-1)$, поэтому Ω_d образует твердый шар, только если $d=2$.

К сожалению, хотя достаточные условия для представления состояния известны, они не сильно улучшают наше понимание геометрии Ω_3 [5]. Мы знаем, что набор чистых состояний имеет четыре вещественных измерения и что грани Ω_3 являются копиями трехмерной модели Блоха, но как все это выглядит на самом деле? Обобщение для $d=3$ основано на записи 3х3-матрицы плотности ρ как

$$\rho=\frac{1}{3}(\lambda_0+\sum_{m=1}^{8}g_m\lambda_m),$$

где g_m – вещественные коэффициенты;
λ_0 – единичная матрица;
λ_m – генераторы $su(3)$-алгебры Ли, которые представлены в виде 8-матриц Гелл-Манна, эрмитовых, бесследовых и удовлетворяющих соотношению ортогональности $Tr\{\lambda_i\lambda_k\}=2\delta_{ik}$, которые однако не унитарны, в отличие от матриц Паули.

В результате было уже обнаружено, что пространство трехуровневых векторов является довольно сложной областью $\delta\Omega$, лежащей внутри 8-ми мерной гиперсферы, не заполняя ее. Кроме того, простая картина унитарных операторов, ведущих к вращению блоховского вектора, не применяется для кутрита.

На пути к торической геометрии

Для анализа чистых d-уровневых $(d=3,4,\ldots)$ квантовых состояний кутритов $n=3$ и выше происходит встреча с многомерными однородными унитарными пространствами $M=G/H$, такие как нечетномерные сферы

$$S^{2n-1}=U(n)/U(n-1)=SU(n)/SU(n-1)$$

и комплексные проективные пространства

$$CP^n=U(n+1)/U(1)\times U(n),\ n=d-1=2,3,4.$$

Комплексная размерность однородных пространств M группы G и группой изотропии H равна $dimM=dimG-dimH$. Для кубита удачно сложилось, что сфера Блоха может быть рассмотрена как расслоение Хопфа $S^2=SU(2)/U(1)=S^3/S^1$, и более того, получение, инициализация и наглядность в управлении кубитами на практике были достигнуты благодаря двойственной связи $SO(3)=SU(2)/Z_2$ внутренней симметрии $SU(2)$-спиновых состояний и $SO(3)$-группы вращений трехмерного пространства R^3. При исследовании и работе с кутритами и выше ситуация значительно усложняется как по причине уникальной сложности самих многомерных пространств чистых и смешанных состояний, так и при поиске связей их внешними пространственно-временными симметриями. В результате, кажется полезным для дальнейшего изучения топологических, комплексных и других структур многомерных пространств посмотреть на сферу Блоха, как на сферу Риманову $S^2=CP^1$ [6], которая реализуется как стереографическая проекция на экваториальную плоскость с координатами (x,y), принимаемую за комплексную плоскость $z=(x+iy)=r\cdot exp(i\varphi)$. В результате стереографической проекции каждой точке сферы Римана соответствует единственная точка на комплексной плоскости, так сфера Римана касается комплексной плоскости в начале координат (0,0), совпадающую с южным полюсом сферы Римана, а северному полюсу сферы Римана сопоставляется бесконечно удаленная точка комплексной плоскости C, включение $z=\infty$ дополняет ее до комплексного проективного пространства: $C\to CP^1$, которое в силу комплексной одномерности называют проективной прямой. Комплексное проективное пространство размерности два называют проективной плоскостью. Двумерную сферу

$$S^2=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\mid x^2+y^2+z^2=1\}$$

можно рассматривать как многообразие с двумя картами

$$U=\{(x,y,z)\in S^2\,|\,x^2+y^2+z^2\neq 1\}$$

и

$$V=\{(x,y,z)\in S^2\,|\,x^2+y^2+z^2\neq -1\}$$

и двумя согласованными друг с другом отображениями

$$f_V\,|\,U\to\mathbb{R}^2,(x,y,z)\to\left(\frac{x}{1-z},\frac{y}{1-z}\right),$$

$$f_V\,|\,V\to\mathbb{R}^2,(x,y,z)\to\left(\frac{x}{1+z},\frac{y}{1+z}\right).$$

На этих карте U метрика в точке $P=(u_1,u_2)$ имеет следующий вид:

$$g_{U,P}=\frac{4}{\left(1+|u|^2\right)^2}\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix},$$

аналогично строится метрика на карте V. Поскольку сфера S^2 односвязна, а $SO(2)$ связана, группа голономии есть точно $SO(2)$. Комплексную структуру на S^2 можно просто проверить через комплексные координаты и убедиться, что функции перехода голоморфны. Метрика G_U (G_V) на картах U и (V) в комплексных координатах $z=u_1+iu_2$ $(w=v_1+iv_2)$ приобретает на U следующий вид

$$G_U=\frac{4}{(1+|z|^2)^2}(dz\otimes d\overline{z}+d\overline{z}\otimes dz),$$

и аналогично на карте V. Глобально определенная 2-форма-объем на карте U приобретает вид

$$\omega_U=\frac{4}{\left(1+|z|^2\right)^2}dz\wedge d\overline{z}$$

и аналогично на карте V, где

$$\int_{S^2}\omega=\pi\ .$$

Двумерная сфера S^2 не является Калаби-Яу многобразием в силу того, что тензор Риччи

$$Ric=\frac{2}{\left(1+|z|^2\right)^2}(dz\otimes d\overline{z}+d\overline{z}\oplus dz)$$

не обращается в нуль, или, что тоже самое, форма Риччи $\rho=\frac{2}{\left(1+|z|^2\right)^2}dz\wedge d\overline{z}$.

Первый класса Черна c_1 голоморфного векторного расслоения вычисляется на карте U из общего класса когомологий

$$c(t)=\det\left(1+\frac{it}{2\pi}\Omega(z,\overline{z})dz\wedge d\overline{z}\right)=1+\frac{i}{\pi}\frac{t}{\left(1+|z|^2\right)^2}dz\wedge d\overline{z}\,.$$

Первый класс Черна нетривиален

$$c_1=\left[\frac{i}{\pi}\frac{1}{\left(1+|z|^2\right)^2}dz\wedge d\overline{z}\right],$$

так как интеграл по сфере не обращается в нуль. Группой голономии двумерной сферы S^2 является SO(2), изоморфная $U(1)$, что также не соответсвует определению Калаби-Яу многообразий, для которых в двумерном случае она должна была быть тривиальной, то есть $SU(1)$.

Путь к генеалогическому древу квантовых состояний через универсальную торическую алгебру

Итак, геометрия наших многоуровневых квантовых чистых состояний кудиты $\delta\Omega_d$ соответствует $n=(d-1)$-мерным комплексным проективным пространствам CP^n, которые определяются стандартным образом:

$$CP^n=C^{n+1}(z_0,\ldots,z_n)\text{-}\{0\}/\sim,$$

где знак $(\sim)$ обозначает, что $(z_0,\ldots,z_n)=(\lambda z_0,\ldots,\lambda z_n)=\lambda(z_0,\ldots,z_n)$, где $\lambda\in C^*$, $C^*=C\backslash\{0\}$, то есть все точки $\lambda(z_0,\ldots,z_n)$, лежащие на линии, проходящей через начало координат, отождествляются в одну [6,7]. В результате этого отождествления комплексное проективное пространство CP^n является множеством всех линий в C^{n+1}, проходящих через начало координат, и в котором точки обозначается через однородные координаты $[z_0, z_1,\ldots,z_n]$. CP^n можно считать как C^n вместе с копией CP^{n-1} на бесконечности и более того, как объединение $(n+1)$ аффинных карт:

$$CP^n=U_1\cup\ldots\cup U_{n+1},$$

где

$$U_i\approx C^n\,[z_1,\ldots,z_{n+1}]\to(z_1/z_i,\ldots,z_{i-1}/z_i,1,z_{i+1}/z_i,\ldots,z_{n+1}/z_i),$$

или $U_i=CP^n\backslash V_i$, где $V_i\approx CP^{n-1}$ посредством отображения

$$(z_1,\ldots,z_{n+1})\to[z_1,\ldots,z_{i-1},z_{i+1},\ldots,z_{n+1}].$$

В дополнение комплексное проективное многообразие CP^n является келеровским с $(n+1)$ картами $U_j(j=1,\ldots,n+1)$ с аффинными координатами в них $z_j \neq 0, (z_1,\ldots,z_{n+1}) \in C^{n+1} \setminus \{0\}$, с метрикой Фубини-Стади и гармоничной формой Риччи $Ric=(n+1)\omega$ и, соответственно, с нетривиальным классом Черна c_1, не допускающим в CP^n плоской Риччи метрики [2]. Это обстоятельство является отличием келеровких многообразий от Калаби-Яу (CY_n), для которых $c_1=0$. В результате, CP^n – келерово и все его подмногообразия также келеровские подмногообразия [2].

Через однородные полиномы $f_1,\ldots,f_r \in C[z_1,\ldots, z_{n+1}]$ можно ввести в рассмотрение проективные (как келеровы, так и Калаби-Яу) алгебраические подмножства [7]:

$$V(f_1,..f_r)=\{a \in CP^n \mid f_1(a)=\ldots=f_r(a)=0\} \subset CP^n.$$

Пространства d-уровневых чистых состояний – $\delta\Omega_d$-кудиты являются келлеровыми компактными проективными пространствами $CP^{n-1}=CP^{n-1}(k)$ с единичными весами $k=(k_1, \ldots ,k_n)[d]=(1,\ldots,1)[n]$, $d=k_1+\ldots+k_n$. Так точке – $k_1=(1)[1]$, кубитам отвечает единичный вес $k_2=(1,1)[2] \to CP^1(1,1)$, кутритам $k_3=(1,1,1)[3] \to CP^2(1,1,1)$, квартитам $k_4=(1,1,1,1)[4] \to CP^3(1,1,1,1)$, квинтитам – $k_5=(1,\ldots,1)[5] \to CP^4(1,1,1,1,1),\ldots$, и которые дали начало к применению универсальной мультинарной алгебры рефлексивных проективных весов для алгебраической классификации CY_n-пространств, для которой было рассмотрено обобщение $(n+1)$-мерных единичных весов до квазипроективных [9,10]. Для такого множества весов $k=(k_1, \ldots ,k_{n+1})$ размерности $(n+1)$ с положительными целыми числами $k_i \in Z_+$ можно определять весовые квазипроективные келеровы пространства:

$$CP^n(k_1,\ldots,k_{n+1})=C^{n+1}\text{-}\{0\}/\sim,$$

где $(z_1,\ldots,z_{n+1}) \sim (\lambda^{k_1} z_1,\ldots,\lambda^{k_{n+1}} z_{n+1})$.

В терминах полиномиального кольца $C[z_0, \ldots , z_{n+1}]$ это означает, что каждая координата идет со своим весом k_i [7,8]

$$f(\lambda^{k_1} z_1,\ldots,\lambda^{k_{n+1}} z_{n+1}) = \lambda^d f(z_1,\ldots,z_{n+1}).$$

Цель – найти алгоритм построения всех весовых векторов, отвечающих определенному классу как проективных пространств, так и квазипроективных алгебраических многообразий, которые бы отвечали определенному классу квантовых смешанных и запутанных состояний [1-4]. Предлагается применение алгебраического подхода, связанного с уже известной универсальной алгеброй всех рефлексивных проективных векторов любой размерности и ее возможных обобщений. Так для чистых состояний такая алгебра с расширением размерности рефлексивных весовых векторов начинается с проективного рефлексивного веса $k=(1)$, связанного с проективной точкой, затем двумерного проективного веса $k=(1,1)$, связанного с CP^1, далее 3-х мерного единичного проективного веса $k=(1,1,1)$, связанного с CP^2, 4-х мерного веса $k=(1,1,1,1)$, связанного с CP^3 и так далее, которые все последовательно определяют пространства чистых квантовых состояний кудитов: кубитов, кутритов, квартитов и т.д. (см. *рисунок 1*). В этом случае универсальность алгебры открывает путь к много операционным законам композиции с проективными пространствами чистых состояний CP^n совместно с алгебраическими квазипроективными подмногообразиями, ставя дальнейшие цели связи последних с многомерными смешанными состояниями. Наиважнейшей особенностью универсальности этой алгебры является тот факт, что кроме обычных бинарных операций «расширения» и «сжатия», она последовательно использует в дополнение к бинарным операциям и мультинарнарные операции композиции с $n=3,4,5,\ldots$, что открывает многоцентровые пути к запутыванию состояний. Алгебра рефлексивных проективных векторов была открыта для подсчета рефлексивных проективных весовых векторов $CY_2=K3$- и CY_3-многообразий [9,10], причем именно ее расширенные законы композиции дали возможность для классификации всего многообразия весов разных размерностей с дополнительной классификацией по неприводимым представлениям. Алгебра рефлексивных весовых векторов фактически восходит к теории многомерных чисел (операды), которая возникла в тесной связи с ториковой геометрией при классификации n-мерных Калаби-Яу пространств CY_n с $n=2,3,\ldots$,

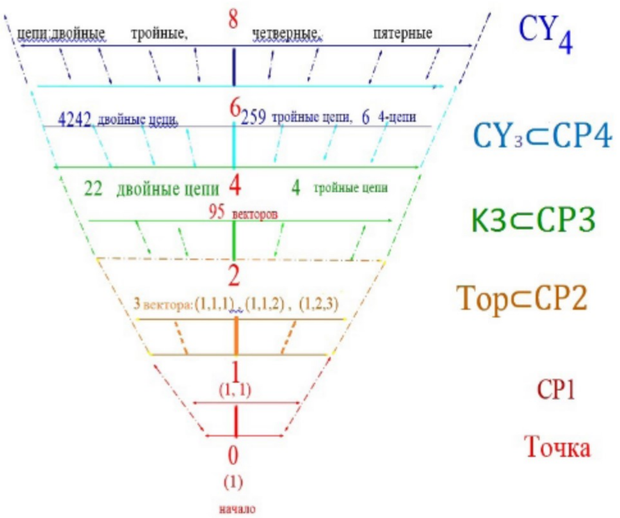

Рис. 1. Генеалогическое древо квантовых состояний в различных размерностях на языке рефлексивных проективных весов

которые имеют ряд замечательных структурных свойств, например, $CY_1 \subset CY_2 \subset CY_3 \subset \ldots$ Этот факт открывает аналогичное последовательное включение проективных пространств состояний Ω_d, что уже можно наблюдать для чистых состояний различных размерностей. Успехи применения универсальной алгебры проективных рефлексивных весов в алгебраической классификации CY_n-пространств открывают уникальные возможности ее применения в прогрессе исследований многомерных проективных пространств $dim=4,5,6,\ldots$ и их алгебраических проективных подмногообразий многокубитных и гибридных систем, включающих как чистые, так и смешанные квантовые состояния.

Литература

1. Волков Г.Г., Смуров С.В., Царьков А.Н. О проективных алгебраических многообразиях в торической геометрии и квантовой физике // Известия Института инженерной физики, 2021. №1(59). С.73-87.
2. Волков Г.Г., Смуров С.В., Царьков А.Н. Многомерные комплексные проективные пространства в квантовой физике и квантовой информации // Известия Института инженерной физики, 2020. №4(58). С.84-94.
3. Смуров С.В., Волков Г.Г., Столбов С.Н., Царьков А.Н. Новые симметрии многомерной геометрии в квантовой физике и квантовой информации// Известия Института инженерной физики, 2020. №3(57). С.85-95.
4. Царьков А.Н., Смуров С.В., Волков Г.Г. Тернарные неабелевы симметрии о запутывании многомерных пространств // Известия Института инженерной физики, 2020. №2(76). С.74-81.
5. K. Zyczkowski, I. Bengtsson. An Introduction to Quantum Entanglement: A Geometric Approach, arXiv:quant-ph/0606228. V1. 27 Jun, 2006.
6. Дубровин Б.А., Новиков С.П., Фоменко А.Т. Современная геометрия. М.: Наука, 1979. 760 с.
7. D. Cox. The Homogeneous Coordinate Ring of a Toric Variety, J. Alg. Geom. 4 (1995) 17, alggeom/9210008.
8. J.P. Brasselet. Introduction to toric varieties / Workshop on «The geometry and topology of Singularities», Cuernavaca, 2007.
9. F. Anselmo, J. Ellis, D. Nanopoulos, G. Volkov. Towards an algebraic classification of Calabi-Yau Manifolds: Study of K3 spaces, Phys. Part. Nucl. 32(2001) 318-375; Fiz. Elem. Chast. Atom. Yadra 32, 2001. Pp. 605-698.
10. F. Anselmo, J. Ellis, D.V. Nanopoulos, G. Volkov. Results from an Algebraic Classification of Calabi-Yau Manifolds Phys.Lett. B499, 2001. Pp.187-199.