№4 2019 [54]
+0

научно-технический журнал

# Известия института инженерной физики

Межрегиональное общественное учреждение
«Институт инженерной физики»
(научное, образовательное и производственное учреждение)

## В НОМЕРЕ




Научно-технический журнал

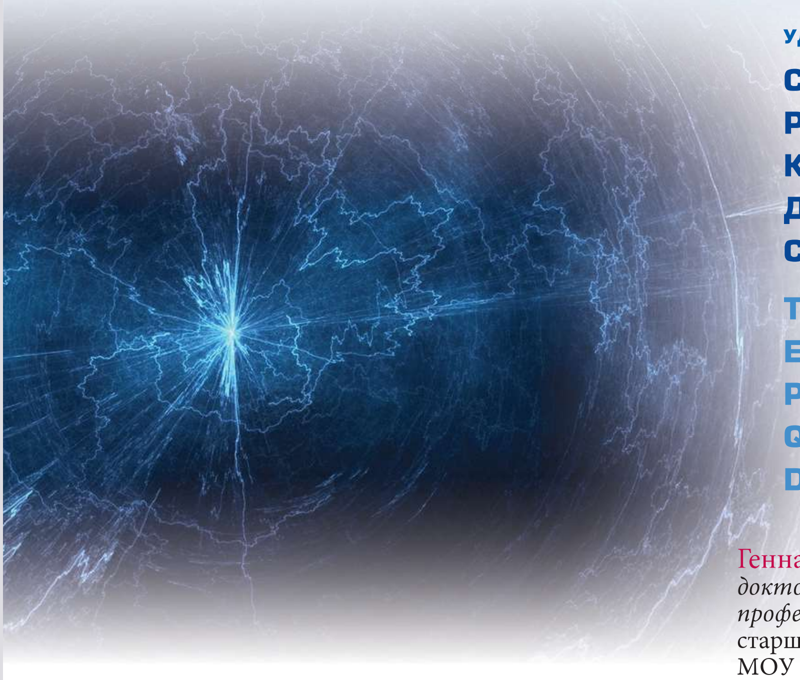
**ИЗВЕСТИЯ Института инженерной физики**

№4 (54) 2019

Издается с апреля 2006 г. Выходит ежеквартально

ISSN 2073-8110

Включен в «Перечень ВАК»
по научным специальностям:
05.11.16. Информационно-измерительные и управляющие системы
05.12.13. Системы, сети и устройства телекоммуникаций
05.13.01. Системный анализ, управление и обработка информации
05.13.19. Методы и системы защиты информации, информационная безопасность



УДК 539.182

# СИММЕТРИЙНО–ГРУППОВЫЕ РАСШИРЕНИЯ АКСИОМ КВАНТОВОЙ ФИЗИКИ В ДИНАМИКЕ КВАНТОВЫХ СПИНОВЫХ СИСТЕМ

# THE SYMMETRY–GROUP EXPANSION OF THE QUANTUM PHYSICS AXIOMS IN THE QUANTUM SPIN SYSTEM DYNAMICS

Алексей Николаевич Царьков
*заслуженный деятель науки РФ*
*доктор технических наук, профессор*
Президент Института –
Председатель Правления Института
МОУ «ИИФ»
Адрес: 142210 Московская обл.,
г. Серпухов, Большой Ударный пер., д. 1а
Тел.: +7(4967) 35-31-93
E-mail: info@iifmail.ru

Сергей Владимирович Смуров
*почетный работник науки и техники РФ*
*доктор технических наук, профессор*
Первый Вице-президент Института –
Главный конструктор
Адрес: 142210, Московская обл.,
г. Серпухов, Большой Ударный пер., д. 1а
Тел.: +7(4967)35-31-93
E-mail: Svs_iif@mail.ru

Геннадий Германович Волков
*доктор физико-математических наук,*
*профессор*
старший научный сотрудник
МОУ «ИИФ»
Адрес: 142210, Московская обл.,
г. Серпухов, Большой Ударный пер., д. 1а
Тел.: +7(4967)35-31-93
E-mail: gennadii.volkov@rambler.ru

Александр Альбертович Масликов
*кандидат физико-математических наук,*
*доцент*
заведующий комплексной
лабораторией физики
Филиал «Протвино»
Государственного университета «Дубна»
Адрес: 142281, Московская обл.,
г. Протвино, Северный проезд, д. 9
Тел.: +7(4967)31-01-92
E-mail: masspref@yandex.ru

Илья Юрьевич Капитонов
студент
Филиал «Протвино»
Государственного университета «Дубна»
Адрес: 142281, Московская обл.,
г. Протвино, Северный проезд, д. 9
E-mail: kapitonov091291@gmail.com

**Аннотация**

Обсуждаются вопросы расширения основ квантовой физики и квантовой информации за счет обобщения Гильбертовых пространств над полями n(n=3,4,… )-арных комплексных чисел. В таких подходах вновь сформулированные понятия Эрмитового сопряжения и n-арной унитарности открывают новые симметрийные алгебры и группы, которые могут быть существенными в динамике многокубитовых и кутритовых квантовых состояний, которые определены в сложных для анализа и восприятия многомерных пространствах. Многомерная геометрия таких квантовых состояний представляет в целом общие трудности как для квантовой теории, так и для теории квантовой информации. В статье рассмотрена структура не Абелевой тернарной алгебры с соответствующей группой симметрией, которая могла бы быть использована при описании как геометрии кутритовых состояний, так и для открытия новых возможностей квантового запутывания и новых физических явлений за пределами обычной квантовой физики.

**Ключевые слова:** квантовая физика, квантовая информация, алгебры, группы, кубиты, кутриты.

**Summary**
The problems of expanding the foundations of quantum physics and quantum information due to the generalization of Hilbert spaces over fields n(n=3,4,…)-ary complex numbers are discussed. In such approaches, the newly formulated concepts of Hermite conjugation and n-ary unitarity open new symmetry algebras and groups, which can be significant in the dynamics of multi-qubit and qutrit quantum states, which are defined in multidimensional spaces that are difficult for analysis and perception. The multidimensional geometry of such quantum states in general presents general difficulties for both quantum theory and the theory of quantum information. The article discusses the structure of non-Abelian ternary algebra with a corresponding symmetry group, which could be used to describe both the geometry of qutrit states, and to discover new possibilities of quantum entanglement and new physical phenomena outside of ordinary quantum physics.
**Keywords:** quantum physics, quantum information, algebras, groups, qubits, qutrits.

Создание квантовой физики явилось одним из самых выдающихся творений на пути познания человеком мироздания в 20 веке. Оно основывалось на передовых исследованиях в период Европейского Ренессанса явлений света, электричества, магнетизма и структуры атомов, и, соответственно, на мощном прогрессе в постижении глубоко абстрактных вопросов математики и геометрии, доступное исключительному абстрагированному уму и интеллектуальной интуиции. Эпохальными вехами, значимыми для открытия начала квантовой физики можно считать 1925-1927 г.г., когда появились революционные работы Гейзенберга, Шредингера, Дирака и др. [1-4], которые положили начало большим спорам и дискуссиям среди физического сообщества того периода (Сольвеевский конгресс 1927 года). Мало сказать, что большинство физиков встретило буквально в штыки абсолютно необычный язык квантовой физики, пришедшей на смену всем понятного языка классической механики. Для многих физиков рождение квантовой механики стало драмой на всю жизнь, так как понять или просто принять ее, было необычайно трудно для сознания исторически воспитанного на интуитивно естественных законах классической физики.

Но остановить победное шествие этой необычной науки уже было невозможно. На ее базисе появились атомная физика, затем и ядерная физика, которые обозначили огромный успех нерелятивистской квантовой механики с областью применения при скоростях рассматриваемых объектов много меньше скорости света $v<<c$. Теория относительности Галилея с соответствующей группой симметрии (группа Галилея), включающей группу вращения SO(3), с абсолютизмом времени вошла в нее как составляющая часть. При больших скоростях $v\sim c$ фундамент релятивистской квантовой механики стоит на расширении группы SO(3), до группы Лоренца SO(1,3), в которой уже скорость света становится абсолютизированным параметром, характеристикой электромагнитного вакуума, что приводит к расширению понятия теории относительности Галилея до специальной теории относительности. Знаменательным событием, связанным с появлением “релятивизма”, стало открытие античастиц. Дальнейший прогресс в развитии релятивистской квантовой механики воплотился уже в конце 40-х и начале 50-х годов в создании теории квантовых полей [5], революционное начало которого зиждилось на вторичном квантовании изучаемого в микромире объекта (электрон описывается уже не волновой функцией, а оператором). Все эти три теории – нерелятивистская и релятивистская механики вместе с теорией квантовых полей имеют современную аббревиатуру как квантовая физика, область применения которой в микромире простирается от $\sim 10^{-8}$см – квантовая информация [6-12] до $\sim 10^{-17}$см (?) – физика сверхвысоких энергий (см. например [13]).

Переход от квантовой механики к квантовой теории поля на деле означал переход от атомной и ядерной физики к физике кварков и лептонов.

Геометрические основы современной квантовой физики кварков и лептонов Стандартной модели могут быть представлены в виде пространства-времени D=(3+1)-четырехмерного континуума. Свойства симметрии этого континуума основаны на пространственно-временной симметрии группы Лоренца-Пуанкаре, а соответствующая квантовая теория построена на основе групп внутренних симметрий

$$SU(3^c)\times SU(2)_I\times U(1)_Y,$$

отвечающих за описание сильных – $SU(3^c)$ и электрослабых взаимодействий – $SU(2)_I\times U(1)_Y$, нарушающихся на масштабах $r\sim 1/M_H\sim 10^{-15}$ см ($M_H\approx 125$ГэВ – масса бозона Хиггса) до Абелевой калибровочной симметрии электромагнитных взаимодействий:

$$SU(2)_I\times U(1)_Y{-}{-}{>}U(1)_{EM}.$$

В настоящее время один из главных теоретических вопросов к Стандартной модели касается ее геометризации [13-18]. Под геометризацией мы понимаем выявление определенных связей между геометрией пространства-времени с законами движения в ней, описываемыми глобальными и локальными внешними симметриями, и фундаментальными компонентами материи и излучения, перемещающихся в геометрии этого пространства-времени, квантовыми свойствами и взаимодействием материальных объектов, описываемых локальными и глобальными симметриями, уже называемыми внутренними симметриями. В рамках геометризации Стандартной модели можно понять такие квантовые числа кварк-лептонной материи, как изотопический спин, цвет кварков, число кварк-лептонных поколений и соответствующие им внутренние симметрии. В нашем понимании геометризация СМ может означать решение такой важной проблемы, как взаимосвязь между внутренними и внешними ключевыми симметриями, которая могла бы объединить указанные внутренние квантовые свойства материи с геометрическими особенностями или структурой пространства-времени.

На наш взгляд, вопросы расширения основ квантовой физики могут возникнуть на пути протонно-нейтронного и даже электронного квантования, поиска геометрического начала 3-цветовой природы кварков и трех поколений кварков-лептонов, уникальных свойств нейтрино и необычной квантовой природы темной материи. Квантование протон-нейтрона можно сравнить с драматической историей квантования атома водорода в 1925-27 гг., когда мы стали свидетелями создания нового языка для описания невидимых в то время явлений микромира. Установление взаимосвязи между особенностями симметрии геометрии пространства-времени и квантовыми свойствами фундаментальной материи, выраженными внутренними симметриями, могут дать полную картину строения видимой Вселенной.

Идеологически, естественно, можно изучать Вселенную либо с точки зрения геометрии пространства-времени и, прежде всего, поиска новых дополнительных размерностей $D=3s+1t+(\ldots)>4$, либо из детального изучения квантовых свойств уже известных частиц и поиска новых частиц с еще неизвестной пока сигнатурой их проявления. Невидимые дополнительные размерности могут иметь совершенно новые топологические свойства, размеры и различные сигнатуры

$$D=m\cdot s+n\cdot t+k\cdot t',$$

а скрытые симметрии могут проявляться в новых квантовых свойствах частиц и в новых пространственно-временных волновых движениях. Открытие необычного нового явления подразумевает рассмотрение расширения принципов специальной теории относительности, которая сформулирована на таком важном свойстве вакуума, как абсолютизм скорости света, то есть теории, связанной с электромагнитно заряженным веществом, описываемым Абелевой группой $U(1)_{EM}$ и спиновым веществом, соответствущим неприводимым представлениям группы $SU(2)$ $(SL(2,C))$.

Некоторые физические свойства такого вещества могли бы подсказать нам, как объяснить исключительные свойства трех нейтрино или проблему конфаймента (запирания) “цвета” внутри адрона. Нейтрино, из-за универсального $(V–A)$-механизма слабых взаимодействий, могут быть связующим звеном между мирами темной и видимой материи. Основываясь на таких свойствах, мы предложили $D=6$ размерную модель трех нейтрино, в которой все три нейтрино объединены в единый волновой 6-мерный спинор [14-17]. При таком подходе нейтрино каждого сорта имеет свой собственный тернарный заряд, который может быть связан с Абелевой локальной калибровочной группой, которая рождает «невидимый свет» Вселенной. В такой картине нейтрино имеет дополнительные возможности пространственно-временных волновых свойств, что можно проверить в экспериментах с дальними нейтрино. С другой стороны, дальние нейтрино могли бы быть использована для дальней телепортации как летающие кутриты. Многомерное обобщение группы Лоренца может подразумевать существование еще одного буста связанного с излучением нейтринного света который так же могла бы излучать и темная материя живущая в этом пространстве. Принцип максимальности скорости света будет действителен только для заряженного вакуума, то есть для частиц с электромагнитным зарядом. Темная материя и/или стерильная праматерия могут распространяться с гораздо большей скоростью [13-18]. Эта праматерия сама по себе могла бы излучать невидимый свет и быть источником образования темной материи [19], структурным базисом которой могла являться праматерия.

В современный период, несмотря на значительные экспериментальные достижения в физике сверхвысоких энергий, которые подтвердили ряд важнейших предсказаний теоретических воззрений 60-х годов (векторные промежуточные массивные бозоны $W^{\pm}$, $Z^{0}$, осуществляющие слабые взаимодействия между адронами (мезоны и нуклоны) и лептонами в рамках электрослабой модели, Хиггсовский бозон, кварковая спектроскопия мезонов и нуклонов, существование новых кварк-лептонных семейств (наряду с нейтрино-“электронным” $(\nu_e)$ – нейтрино “мюонное” $(\nu_\mu)$, наряду со “странным” $s$-кварком

– “очарованный” $c$-кварк), возникли и новые теоретические проблемы, которые в течение довольно длительного промежутка времени так и не нашли своего решения. Так в связи с неоткрытием свободных кварков возникла проблема запирания цветных состояний (и кварков в том числе) в адронах. Проблема появления трех кварк-лептонных поколений и связь с нарушением CP-четности (гипотетические горизонтальные взаимодействия с калибровочной группой $SU(3H)\times U(1H)$). Теории великого объединения и распад протона. Теория 3-х нейтрино. Все это множество теоретически непонятых проблем привело к множеству свободных параметров в так называемой Стандартной Модели всех элементарных состояний- кварков и лептонов во всей динамической картине их взаимодействий – сильных, электромагнитных и слабых.

Главным для нас является то обстоятельство, что перед физиками, исследующими явления и процессы как в области нанометрии $10^{-9}-10^{-12}$ м, так и в фермиметрии $10^{-15}-10^{-18}$ м, ряд возникших проблем носят общий характер. Более того, скрытые симметрии и геометрические концепции малых и больших размерностей возникли и в классической, и в квантовой механике, и в теории квантовых полей. Но и будущее квантовой информации, ресурсы которой заложены в квантовой запутанности, оказались связаны с многомерными пространствами, описывающими квантовые состояния n-кубитов (кубит = двухуровневая квантовая система) ($n$=2,3,…,1000,…) и/или m=1,2,3...-кутритов (трехуровневые квантовые системы), на которые в конечном итоге действуют алгоритмы. Понимание симметрийно-геометрических свойств таких пространств важны для объяснения природы запутанных состояний, явления, полностью отсутствующего в любой неквантовой геометрической структуре. Геометрические аспекты традиционной квантовой теории и квантовых вычислений привели к детальному изучению квантовой геометрии и ее связи с запутанностью. Появилась обширная картина геометрии обычных квантовых вычислений, показывающая, что сложные проективные пространства $CP^{(2^n-1)}$ точно воплощают неприводимые состояния кубитового элемента квантовой цепи и, кроме того, позволяют явное изучение реальных путей в неприводимое пространство состояний, соответствующее идеализированным квантовым операциям.

Интересующий нас вопрос о геометрии кутритов – 3-х уровневых квантовых систем (кукарты, куквинты и выше) и их свойствах представляет исключительный интерес как во всей протяженной области традиционной квантовой физики, так и в квантовой информации. Так, чтобы управлять кутритом, прежде всего, надо знать его геометрический образ и симметрии, которые стоят за этим образом.

Исходя из устоявшихся базисных аксиом квантовой теории и нашего понимания ее возможного расширения, “темная” материя могла бы иметь другие спиновые свойства, отличные от неприводимых представлений спиновой $SU(2)$-группы, и которые могли быть связаны с существованием экзотических симметрий и геометрий [20-24,26,27]. Так, в тернарной модели нейтрино появляется возможность открытия новых спинорных структур, которые мы связываем со специфическими спинорными свойствами праматерии или темной материи [14].

В качестве иллюстрации мы приведем пример как может измениться интерпретация нейтринного кутрита – 3-х нейтринных состояний – из предположения, что пространственно-временные свойства 3-х нейтрино отличны от свойств заряженных кварков и заряженных лептонов, и 3-нейтринное состояние (вместе с темной материей) принадлежит $D=6$-мерному пространству. Так, мы можем рассматривать три нейтрино как единое поле в пространстве размерности $D=6$, т.е. с двумя, тремя дополнительными некомпактными измерениями, и, в соответствии с тернарной комплексностью, можно представить осуществление (реализацию) нейтрино как 3-спинор, описывающий систему трех нейтринных состояний: $\nu_e$ – нейтрино-электронное, $\nu_\mu$ – нейтрино-мюонное, $\nu_\tau$ – нейтрино-тау, со следующими тремя операциями «зарядового сопряжения» (новый нейтринный свет): частица-античастица-антиантичастица (тернарная модель 3-х нейтринных состояний по аналогии с 4-мерной дираковской теорией электрона и позитрона). Мы ввели операции тернарного сопряжения. Такое представление трех нейтринных состояний в $D=6$-мерии предполагает существование новой Абелевой калибровочной тернарной группы, обуславливающей динамику излучения темного «света» [13-18].

### От теории чисел к новым симметриям в квантовой физике и за ее пределами

Аппарат $4D$-мерной квантовой теории поля, созданный в 50-х годах, и успешно применяющийся в физике частиц и космологии, требует интенсивной разработки геометрических путей решения, ассоциированных с нетривиальным расширением $D=3+1$ пространства-времени Минковского. В течение последних лет мы связывали это с поиском новых тензорных структур в многомерных пространствах $D\geq 5$ на основе теорий новых гипер-чисел, новых алгебр и новых симметрий. Естественно, этот путь приводит к расширению аксиом квантовой физики [20-27]. Мы имеем в виду теорию чисел – теорию рефлексивных чисел, а затем и циклических комплексных чисел $C_n$. Большой набор несимметричных пространств определяется группами голономии, которые непосредственно связаны с известными бинарно-нормированными дивизионными алгебрами, т.е. R, C, H, O. Примечательно, что бесконечный набор компактных комплексных пространств с $SU(n)$-голомонией ($n$=1,2,3,...) связаны с теорией рефлексивных чисел. Для более подробного изучения алгебраической структуры полиномиальных уравнений типа Калаби-Яу $CY^n$ обратимся к теории $C_n$ – циклических комплексных чисел, что является более естественным продолжением C – комплексных чисел, чем современная теория нескольких комплексных переменных. Основываясь на циклической $C_n$ – комплексификации евклидовых $R^n$ пространств мы строим бесконечный ряд n-мерных гиперповерхностей с $n=2,3,\ldots$ Мы определяем Абелевы транзитивные групповые симметрии таких пространств и некоторые топологические свойства для любого измерения. Представлен гиперкомплексный анализ для циклически-голоморфных функций в M $C^n$-пространствах, позволяющий получить гипер-уравнения Коши-Римана / гипер-Лапласа для «циклически-голоморических / циклически-гармонических» функций и Абелевы $(n-1)$ размерности инвариантные уравнения для n-мерных спиноров. Мы можем проиллюстрировать расширение теоремы Пифагора для любого n-мерного симплекса в $R^n$-евклидовом пространстве. Вопросы о существовании трех цветовых кварковых симметрий и трех кварклептонных поколений могут иметь природу, связанную с новыми экзотическими симметриями за пределами алгебр / групп Картана-Киллинга-Ли. Наш длительный поиск этих симметрий начался с классификации пространств Калаби-Яу на основе $n$-мерных алгебр рефлексивных проективных чисел и привел нас к построению комплексных и гиперкомплексных чисел, в рамках которых мы строим новые Абелевы и НеАбелевы симметрии [24-27]. Мы построили бесконечную цепочку таких групп $U_1(a_1,\ldots,a_{n-1})$ со свойствами, обобщающими свойства комплексных чисел, в том числе важнейшее направление их развития – голоморфный анализ, который привел нас к обобщению квадратичных уравнений Лапласа для двоичных $n=2$ гармонических функций. Соответствующее обобщение уравнения Лапласа для $n$-мерного голоморфного анализа дает нам однородные дифференциальные уравнения порядка n для гармонических функций, инвариантных по отношению к этим Абелевым n-мерным группам $U^{(n-1)}$ и обладающими новыми пространственными свойствами.

Геометрическую природу этих Абелевых групп симметрии возможно искать в теории Абелевых $n$-арных комплексных чисел. В поисках новых геометрических многообразий и связанных с ними групп (как внешних, так и внутренних) симметрий и их представлений в рамках расширения хорошо изученной теории бинарных $n=2$ комплексных и гиперкомплексных чисел по теории n-арных комплексных (Абелевых) и гиперкомплексных (НеАбелевых) чисел с $n>2$.

Согласно Абелевой $C_n$-циклической групповой комплексификации евклидовых $R^n$-пространств, следуя этому методу, мы, последовательно, построили ряд – $n$=3,4,5,6,12 из n-мерного (n-1) параметра Абелевых групп-гиперповерхностей с $n$=2,3,... Мы определяем Абелевы группы симметрий для таких пространств. $N$-арные комплексные числа приводят к двум изоморфным, n-арным «унитарным» и «ортогональным», Абелевым (n-1)-параметрическим группам симметрии, которые могут быть основой для описания невидимого света вселенной. Особенностью нашего подхода является появление некомпактных групп Абелевой симметрии [21-27].

Теория Абелевых комплексных чисел основана на комплексификации евклидова $R^n$-пространства

$$z=x_0q^0 + x_1q^1 + \ldots + x_{(n-1)}q^{(n-1)},$$

использующей $C_n=q_0,q,\ldots,q^{(n-1)}$: $q^n=\pm q_0$, $q_0$ – единица группы их $n$-одномерных неприводимых представлений для операций сопряжения

$$\tilde{q}=q^{\{1\}}=jq,\ \tilde{\tilde{q}}=q^2=j^2q,\ldots,q^{\{n-1)}=j^{\{n-1\}}q;$$
$$q^{\{n\}}=q;\ j=e^{(2\pi i/n)},$$

которые позволяют определить норму $|z|^n=z\cdot z^{\{1\}}\cdot\ldots\cdot z^{\{n-1\}}$, с композитными свойствами группы $||z_1\cdot z_2||^n=||z_1||^n\ ||z_2||^n$, что позволяет для $n$-арных комплексных чисел с единой нормой определять $(n-1)$- параметрические Абелевы группы. Следуя Абелевой $C_n$- комплексификации евклидовых пространств $R^n$, мы последовательно строим ряд Абелевых $(n-1)$- инвариантно-параметрических гиперповерхностей

$$|z|^n=F_0(x_0,\ldots,x_{(n-1)})=1$$
$$\text{для } n=3,4,5,6,\ldots,12(n-1)$$

(дальнейшее расширение очевидно), мы изучаем процесс, выводим формулы Эйлера как основу для вывода $n$-арных унитарных Абелевых групп в $(n\times n)$-матричном представлении. Для иллюстрации приведем выражения алгебраических уравнений для гиперповерхностей, определенных при помощи $C_n$ только для $n\leq 6$ в обоих случаях, A) $q^n=q_0$ , B) $q^n=-q_0$ соответственно (эти случаи могут быть связаны расширенным поворотом Вика).

Получены обобщения $n$-мерной тригонометрии и теоремы Пифагора для $n$-мерных симплексов в каждом $n$-арном случае, например, пусть $n=3$:

$$e^{(q\alpha+\beta q^2)}=c_0(\alpha,\beta)q_0+s_0(\alpha,\beta)q+t_0(\alpha,\beta)q^2,$$

где $c_0^{\,3}+s_0^{\,3}+t_0^{\,3}-3c_0s_0t_0=1$.

Двухпараметрическая Абелева тернарная «унитарность» имеет вид:

$$U=e^{(q\alpha+\beta q^2)},$$
$$U^{+}=e^{(jq\alpha+j^2\beta q^2)},$$
$$U^{++}=e^{(j^2q\alpha+j\beta q^2)}:$$
$$UU^{+}U^{++}=\hat{1}$$

Или в матричной форме

$$U=\begin{pmatrix} a & qb & q^2c \\ cq^2 & a & qb \\ qb & cq^2 & a \end{pmatrix},$$

$$U^{+}=\begin{pmatrix} a & jqb & j^2q^2c \\ j^2\,cq^2 & a & jqb \\ jqb & j^2cq^2 & a \end{pmatrix},$$

$$U^{++}=\begin{pmatrix} a & j^2qb & j^2q^2c \\ j\,cq^2 & a & j^2qb \\ j^2qb & jcq^2 & a \end{pmatrix},$$

$$UU^{+}U^{++}=detU=(a^3+b^3+c^3-3abc)\cdot\hat{1}=\hat{1}.$$

Последующее рассмотрение в $CN^n$ $n$-арном комплексном $C^n$-евклидовом пространстве путей голоморфизма (и полиморфизма) для функций:

$$F(z,z^{\{1\}},\ldots,z^{\{n-1\}})=F_0(x_0,\ldots,x_{n-1})q_0+F_1(x_0,\ldots,x_{n-1})q+\ldots+F_{(n-1)}(x_0,\ldots,x_{n-1})q^{\{n-1\}}$$

($z^{\{p\}}$-$p=1,2,\ldots,(n-1)$ есть число операций сопряжения $n$-арного комплексного числа $z$) позволяет вывести $n$-мерные волновые уравнения (типа Лапласа / Дирака) для гармонических функций $F_a(x_0,\ldots,x_{n-1})$ и соответствующих им $n$-спиноров, инвариантных относительно соответствующих $(n-1)$-параметрических Абелевых групп симметрии. Основным выводом наших расчетов является то, что Абелевы свойства циклических групп $C_n$ приводят к факторизации всех соответствующих групп $(n-1)$- мерных гиперповерхностей с определением Абелевой группы $U^{(n-1)}$. При помощи анализа $U^{(n-1)}$ мы получаем инвариантные дифференциальные уравнения Лапласа для гармонических функций n переменных $F_i(x_0,\ldots,x_{n-1})$, $i=0,\ldots,n-1$, где гармонические функции определяются через разложение голоморфной функции [25-27].

Мы естественным образом расширили конструкции изучаемых Абелевых $n$-арных комплексных чисел до построения НеАбелевых $n$-арных гиперкомплексных чисел, начиная с двух вводимых гиперкомплексных чисел, дающих $(n^2-1)$ (для $tsu(3)$-8) генераторов:

$$Z=x_0Q_0+x_1Q_1+\ldots+x_{(n^\wedge 2-1)}Q_{(n^2-1)}:$$
$$(Q_k)^n=\pm Q_{(n^2-1)};\ k=1,\ldots,n^2-1.$$

Дифференциальные уравнения Лапласа можно найти из уравнений Коши-Римана порядка $deg=n$. Следуя процедуре Дирака, можно получить из дифференциальных уравнений для $n$-арных гармонических функций линейные дифференциально-инвариантные уравнения для $n$-спиноров:

$$\hat{F}(\partial x_0,\ldots,\partial x_{n-1})\psi=0,\ \psi=\begin{pmatrix}\eta\\ \ldots\\ \eta_{n-1}\end{pmatrix}$$

Мы идентифицировали и исследовали все Абелевы симметрии для этих случаев ($n$=3,…12) которые могли бы послужить возможностью для рассмотрения Абелевых теорий невидимого света Вселенной, взаимодействующих с некоторой невидимой материей-материей с экзотическими n-спинорными фермионами. В качестве примера приведем соотношения коммутаций для $tsu(3)$-алгебры:

$[Q_1,Q_2]=(j^2-j)Q_6;\ [Q_2,Q_3]=(j^2-j)Q_4;\ [Q_3,Q_1]=(j^2-j)Q_5;$
$[Q_4,Q_5]=(j^2-j)Q_3;\ [Q_5,Q_6]=(j^2-j)Q_1;\ [Q_6,Q_4]=(j^2-j)Q_2;$

$[Q_1,Q_4]=0;\ [Q_2,Q_4]=(j^2-j)Q_8;\ [Q_3,Q_4]=(j-j^2)Q_7;$
$[Q_1,Q_5]=(j-j^2)Q_7;\ [Q_2,Q_5]=0;\ [Q_3,Q_5]=(j^2-j)Q_8;$
$[Q_1,Q_6]=(j^2-j)Q_8;\ [Q_2,Q_6]=(j-j^2)Q_7;\ [Q_3,Q_6]=0;$

$[Q_1,Q_7]=(j-j^2)Q_3;\ [Q_1,Q_8]=(j^2-j)Q_2;\ [Q_2,Q_7]=(j-j^2)Q_1;$
$[Q_2,Q_8]=(j^2-j)Q_3;\ [Q_3,Q_7]=(j-j^2)Q_2;\ [Q_3,Q_8]=(j^2-j)Q_1;$

$[Q_4,Q_7]=(j^2-j)Q_5;\ [Q_4,Q_8]=(j-j^2)Q_6;\ [Q_5,Q_7]=(j^2-j)Q_6;$
$[Q_5,Q_8]=(j-j^2)Q_4;\ [Q_6,Q_7]=(j^2-j)Q_4;\ [Q_6,Q_8]=(j-j^2)Q_5;$

Единичные тернарно-гиперкомплексные числа порождают НеАбелеву тернарно-унитарную $SU(3)$-группу Ли. Используя необычные правила коммутации, мы построили гиперповерхность, определенную тернарной единицей

$$z=(x_0q_0+x_7q+x_8q^2)+(x_1q_0+x_2q+x_3q^2)q_1+(x_4q_0+x_5q+x_6q^2)\,q_1^{\,2}$$

8 мнимых единиц $\{Q_k|q,q^2,q_1,qq_1,q^2q_1,q_1^{\,2},qq_1^{\,2},q_1^{\,2}q\,|\,Q_k^{\,3}=q_0\}$ порождают $tsu(3)$. Тернарные гиперкомплексные единицы $|z\cdot\tilde{z}\cdot\tilde{\tilde{z}}|=1$ порождают соответственно тернарную неАбелеву TSU(3) группу Ли. Соответствующая $TSU(3)$-инвариантная гиперповерхность $|z\cdot\tilde{z}\cdot\tilde{\tilde{z}}|=1$ принимает следующий вид [18,24-27]:

$$F(x_0,\ldots,x_8)=|z_0|^3+|z_1|^3+|z_2|^3-\left(z_0\tilde{z}_1\tilde{\tilde{z}}_2\right)-\left(\tilde{z}_0\tilde{\tilde{z}}_1z_2\right)-\left(\tilde{\tilde{z}}_0\tilde{z}_1z_2\right)=1,$$

где

$$z_0=x_0q_0+x_7q+x_8q^2z_1=x_1q_0+x_2q+x_3q^2z_2=x_4q_0+x_5q+x_6q^2$$

или

$$F(x_0,\ldots,x_8)=x_0^3+x_7^3+x_8^3+x_1^3+x_2^3+x_3^3+x_4^3+x_5^3+x_6^3-3x_0x_7x_8-3x_1x_2x_3-3x_4x_5x_6-3x_0(x_1x_4+x_2x_5+x_3x_6)-3x_7(x_1x_5+x_2x_6+x_3x_4)-3x_8(x_1x_6+x_2x_4+x_3x_5)=1$$

Отметим исчезновение всех вкладов $V_k$ в разложение

$$V=(x_0,\ldots,x_8)Q_0+V_1\,(x_0,\ldots,x_8)\,Q_1+\ldots+V_8\,(x_0,\ldots,x_8)\,Q_8\,,$$

то есть из возможных 729 членов только 45 остались ненулевыми! Таким образом, построенные генераторы $Q_a$; $a=1,\ldots$, имеют более сложные, чем бинарные кватернионы, коммутационные соотношения

$$Q_aQ_b=j^kQ_bQ_a;\ j=e^{2\pi i/3},$$

где значение $k=0,1,2$ зависит от выбора подгруппы генераторов (есть три $\{Q_1Q_2Q_3\}$, $\{Q_4Q_5Q_6\}$, $\{Q_7Q_8\}$ и они образуют алгебру $tsu(3)$).

Сама гиперповерхность является групповым многообразием, определяемым тернарной группой $TSU(3)$. Эта группа и ее алгебра принципиально отличаются от группы Картана-Ли группы $SU(3)$ и ее алгебры $su(3)$, определяемой 8 генераторами Гелл-Манна.

Соответствующая кубическая Мааркри-гиперповерхность принимает в пространстве $R^8$ следующий вид [18,24,25,26,28]:

$$U=\begin{pmatrix} z_0 & qz_1 & q^2z_2 \\ q^2\tilde{z}_2 & \tilde{z}_0 & q\tilde{z}_2 \\ q\tilde{\tilde{z}}_1 & q^2\tilde{\tilde{z}}_2 & \tilde{\tilde{z}}_0 \end{pmatrix},$$

$$DetU=x_0^3+x_1^3+x_2^3+x_3^3+x_4^3+x_5^3+x_6^3+x_7^3+x_8^3-3x_0x_7x_8-3x_1x_2x_3-3x_4x_5x_6-3x_0(x_1x_4+x_2x_5+x_3x_6)-3x_7(x_1x_5+x_2x_6+x_3x_4)-3x_8(x_1x_6+x_2x_4+x_3x_5)=1.$$

Принцип Паули можно также обобщить на принцип, который мы называем принципом Маркриса. Из этого принципа вытекает возможность присутствия в одном квантовом состоянии $n$ одинаковых частиц в зависимости от спиновой структуры $n$-спинор - фермионов. Например, трехцветные идентичные кварки могут находиться в одном квантовом состоянии в адронах! Обобщение мнимого единичного числа на гиперкомплексные кватернионы с 3-мнимыми единицами: $e_a$, $a=1,2,3$; привело к концепции новой коммутативности для мнимых единиц:

$$e_ae_b=-e_be_a,\ a\neq b.$$

Единичные мнимые кватернионы $e_a^2=-1$ могут быть выражены в виде матриц Паули, сопоставленных мнимой единице $i$:

$$e_a=i\sigma_a,\ a=1,2,3.$$

Аналогичное определение тернарных комплексных чисел привело к восьмизначным мнимым числам $q_a$: $q_a^3=\pm q_0=\pm 1$, $a=1,2,3,\ldots,8$; правило коммутативности расширяется следующим образом: $q_aq_b=jq_bq_a$ или

$$q_aq_b=j^2q_bq_a,\ a\neq b,\ j=e^{(2\pi i/3)}.$$

В общем случае правило антикоммутации для n-арных чисел $q_a$: $q_a^n=\pm q_0=\pm 1$, $a=1,2,3,\ldots,(n^2-1)$ может принимать следующую форму $q_aq_b=j^kq_bq_a$, $a\neq b$, $j=e^{(2\pi i/n)}$, $n=2,3,4,\ldots$; $k=1,2,3,\ldots,n-1$.

Новые правила коммутации, применяемые в квантовой теории поля, могут привести к обобщению принципа Паули, который утверждает, что на одном уровне не могут существовать $n=3;4;5$ одинаковых частиц.

Используя необычные правила антикоммутации Мааркри, мы построили норм-дивизионную алгебру для гипертернарных комплексных чисел [25,26,28]:

$$\{q_a,\ q_0=\hat{1}\mid q_a^3=q_0;\ a=1,\ldots,8\}$$

$$q_aq_b=jq_bq_a,\ \text{или}\ q_aq_b=j^2,\ a\neq b$$

Существование нового вакуума через понимание Абелевых симметрий невидимого света может помочь найти обобщение группы Лоренца, то есть выйти за рамки обычной геометрии 4-мерного пространства-времени. Вывод современной физики состоит в том, что наша кварк-лептонная материя формирует видимую Вселенную, которая является лишь малой частью огромной гипервселенной. На языке математики мы должны построить новое геометрическое пространство с размерностью больше 4 и новыми симметриями, более широкими, чем симметрия группы Лоренца / Пуанкаре. Для этого нового пространственно-временного континуума мы построим новую квантовую теорию поля с описанием праматерии с ее излучением отличным от того, что было создано нашей видимой вселенной с кварк-лептонной материей, наделенной полуцелым спином, электрическими и цветными зарядами, гравитационной массой. Критические вопросы, такие как спин, заряд, цвет, масса привели нас к поиску новых симметричных геометрических пространств, основы которых мы ищем в новых теориях чисел, алгебр, конечных групповых симметрий и т. д. Если мы добьемся успеха на этом пути, мы сможем понять механизм формирования нашей видимой Вселенной?!

Аналогично, рассматривая $n=4,5,6,\ldots$-арные гиперкомплексные числа, можно построить $n$-арные алгебры и $n$-арные группы с соответствующими коммутационными соотношениями, где $j=e^{(2\pi i/n)}$. Эти соотношения обобщают известные антикоммутационные соотношения между мнимыми кватернионами $\{e_1,e_2,e_3\}$, матричной реализацией которых являются матрицы Паули

$e_1=i\sigma_1$, $e_2=i\sigma_2$, $e_3=-i\sigma_3$: $e_\alpha e_\beta=-e_\beta e_\alpha$, $\alpha\neq\beta$. Важным свойством тернарной ($n$-арной) группы $TSU(3)$ в матричном формализме является введение новых концепций комплексного сопряжения, транспонирования, эрмитова сопряжения и унитарности: $UU^{+}U^{++}=1$. Следующий шаг связан с дальнейшим изучением тернарных алгебр Клифорда в их взаимосвязи с бинарными алгебрами Клиффорда, которые позволили бы строить $n$-спиноры материи с необычными квантовыми свойствами.

В качестве иллюстрации приведем первый пример того, как может измениться интерпретация существующих трех нейтринных состояний в предположении, что пространственно-временные свойства трех нейтрино отличаются от свойств заряженных кварков и заряженных лептонов. Таким образом, мы можем рассматривать три нейтрино как одно поле в пространстве размерности $D=6(12)$ то есть с двумя, тремя дополнительными некомпактными измерениями, и, в соответствии с тернарной комплексностью, реализация нейтрино может быть представлена в виде 3-спинора со следующими тремя операциями зарядового сопряжения (новый нейтринный свет):

$$\psi=\begin{pmatrix}\nu_e\\ \tilde{\nu}_\mu\\ \tilde{\tilde{\nu}}_\tau\end{pmatrix},\ \psi^{c}=\begin{pmatrix}\nu_\tau\\ \tilde{\nu}_e\\ \tilde{\tilde{\nu}}_\mu\end{pmatrix},\ \psi^{cc}=\begin{pmatrix}\nu_\mu\\ \tilde{\nu}_\tau\\ \tilde{\tilde{\nu}}_e\end{pmatrix},\ \psi^{ccc}=\psi,$$

описывающим систему из трех нейтринных состояний:

$\nu_e$ – электронное нейтрино;

$\nu_\mu$ – мюонное нейтрино;

$\nu_\tau$ – тау-нейтрино, которые могут быть представлены как частица-античастица-анти-античастица (тернарная модель 3 нейтринных состояний, по аналогии с 4-мерной теорией электрона Дирака). Представление трех нейтринных состояний в $D=6$ предполагает существование новой Абелевой группы U(1), связанной с существованием нового света, возможно, связанного с темной энергией[14-18,28].

В заключение можно сказать, что вся современная квантовая физика, несмотря на общие проблемы, связанные с описанием многомерных квантовых состояний, бурно развивается в своих выделенных направлениях, обусловленных своими масштабами. Если начальный масштаб $\sim10^{-8}\sim10^{-10}$ см связан с современным прогрессом в теории квантовой информации (квантовые компьютеры и телепортация), связанной с контролем и управлением многокубитной (многокудитной) запутанной квантовой системы, то нижний предел ($\sim10^{-17}$см) с развитием физики сверхвысоких энергий, описывающей физику элементарных частиц.

Какая теория стоит за этим пределом это самый важный вопрос для всей современной квантовой физики? Какие изменения в квантовой физике, связанные с существованием новых групп симметрий с соответствующей необычной многомерной геометрией, потребуются для проникновения человеческого сознания на расстояния ($<<10^{-17}$см (?)), так как необычные явления ее, такие как квантовая запутанность и дальняя телепортация, могут быть прояснены с изучением нового вакуума на этих расстояниях. Возник вопрос аналогичный тому, который встал перед классической физикой в 1925-1927 г.г.

Мы предлагаем свой путь к расширению основ квантовой физики через обобщение поля комплексных (гипер-комплексных) чисел, вводя в рассмотрение тернарные $n=3$ (и выше $n>3$) комплексные (гипер-комплексные) числа. Это позволило нам найти новые Абелевы и не-Абелевы алгебры и группы симметрии, которое приводят к возможности нового подхода к описанию геометрии кутритных квантовых состояний, с проблемами которого столкнулась современная квантовая физика в своих двух важнейших направлениях, теории квантовых полей и теории квантовой информации.

## Приложение.
## TSU(3)-алгебра

$$\lambda_1= (1/3)(q_1+q_2+q_3) \qquad [\lambda_1,q_7]=(j-j^2)\,\lambda_1$$
$$\lambda_2= (1/3)\,(q_1+jq_2+j^2q_3) \qquad [\lambda_2,q_7]=(j^2-1)\,\lambda_2$$
$$\lambda_2= (1/3)\,(q_1+j^2q_2+jq_3) \qquad [\lambda_3,q_7]=(1-j)\,\lambda_3$$

$$\xi_1=(1/3)\,(q_4+q_5+q_6) \qquad [\lambda_1,q_8]=(j^2-j)\,\lambda_1$$
$$\xi_2=(1/3)\,(q_4+j^2q_5+q_6) \qquad [\lambda_2,q_8]=(j-1)\,\lambda_2$$
$$\xi_3=(1/3)\,(q_4+jq_5+q_6) \qquad [\lambda_3,q_8]=(1-j^2)\,\lambda_3$$

$$[\lambda_1, \lambda_2]=-\xi_3 \qquad [\xi_1, \xi_3]=-\lambda_2$$
$$[\lambda_2, \lambda_3]=-\xi_1 \qquad [\xi_3, \xi_2]=-\lambda_1$$
$$[\lambda_3, \lambda_1]=-\xi_2 \qquad [\xi_2, \xi_1]=-\lambda_3$$

$$[\lambda_1, \xi_1]= (1/3)\,(j-j^2)(q_7-q_8)$$
$$[\lambda_2, \xi_2]= (1/3)\,[(1-j)q_7+(1-j^2)q_8]$$
$$[\lambda_3, \xi_3]= (1/3)\,[(j^2-j)q_7+(j-1)q_8]$$

$$[\xi_1,q_7]=(j^2-j)\,\xi_1$$
$$[\xi_2,q_7]=(j-1)\,\xi_2 = (j^2-j)\,j^2\,\xi_2$$
$$[\xi_3,q_7]=(1-j^2)\,\xi_3 = (j^2-j)\,j\,\xi_3$$
$$[\xi_1,q_8]=(j-j^2)\,\xi_1 = (1-j)\,j\,\xi_1$$
$$[\xi_2,q_8]=(j^2-1)\,\xi_2 = (1-j)\,j^2\,\xi_2$$
$$[\xi_3,q_8]=(1-j)\,\xi_3$$

$$[[\lambda_1, \lambda_2]\,\lambda_3]+ [[\lambda_2, \lambda_3]\,\lambda_1]+ [[\lambda_3, \lambda_1]\,\lambda_2]=0$$

$$[[\xi_1, \xi_2]\,\xi_3]+ [[\xi_2, \xi_3]\,\xi_1]+ [[\xi_3, \xi_1]\,\xi_2]=0$$

**Литература**


1. Heisenberg W. Physics and Philosophy. Harper, 1958.
2. E. Schrödinger. Quantisierung als Eigenwert-problem (Erste Mitteilung) // Annalen der Physik, 1926. Vol. 384(79). Pp. 361-376.
3. Dirac P. M.A. The quantum theory of electron, Proceeding of the Royal Society of London, 117 (1928). Pp.610-624.
4. Weyl H. Gruppentheorie und Quantenmechanik. Leipzig, 1998. 288 p.
5. Bogoljubov N.N., Shirkov D.V. Introduction to quantum field theory. NAUKA, 1984.
6. Нильсен М., Чанг И. Квантовые вычисления и квантовая информация. М.: Мир, 2006. 824 с.
7. Валиев К.А. Квантовые компьютеры и квантовые вычисления // УФН, 2005. №175(1). С. 3-39.
8. Bennett C., Brassard G. Quantum cryptography: Public key distribution and coin tossing // IEEE International Conference on Computers Systems and Signal Processing, 1984. №11. Pp. 175-179.
9. Bertlmann R.A., Zeilinger A. Quantum (Un) speakables: From Bell to Quantum Information, Springer-Verlag, 2002. 483 p.
10. Bertlmann R.A. Entanglement, Decoherence and Bell Inequalities in Particle Physics, Lectures University of Siegen, 2013.
11. Смуров С.В., Волков Г.Г., Масликов А.А. Идеи и методы генерации запутывания твердотельных спин-кубитов. Статистический ансамбль и матрица плотности // Известия Института инженерной физики, 2018. №4(50). С. 86-92.
12. Волков Г.Г., Масликов А.А., Смуров С.В., Царьков А.Н. О многокубитных схемах запутывания и телепортации на основе NV-центров в алмазе // Известия Института инженерной физики, 2019. №2(52). С. 103-105.
13. Ammosov V., Volkov G. Can Neutrinos Probe Extra Dimensions? arXiv:hep-ph/0008032 (2000).
14. Volkov G.G. Geometry of Majorana neutrino and new symmetries., Annales de la Fondation Louis de Broglie, Vol. 31 No 2-3, 2006. p.227, arXiv:hep-ph/0607334
15. Volkov G. The Possible Signals from the D=6 Space-Time, arXiv:1112.3583 (2011).
16. Baranov D.S., Volkov G.G. Neutrino On The Possible New Time Structure, arXiv:1302.1482 (2013).
17. Волков Г.Г., Смуров С.В., Кукин Н.С., Мурадова А.Р., Глотова И.О. Математические вопросы расширения основ квантовых теорий // Известия Института инженерной физики, 2015. №4(38). С. 71-84.
18. Maslikov A.A., Volkov G.G. The Geometry of the Standard Model - Nonlinear Dynamics and Applications. In Proceed. of NPCS-XXI, Minsk, 20 (2014).
19. Mambrini Y. Histories of Dark Matter in the Universe, Laboratoire de Physique Theorique, Universite Paris-Sud, F-91405 Orsay, France, 2014. 612 p.
20. Volkov G. Hunting for the New Symmetries in Calabi-Yau Jungles, J. Mod. Phys A 19, 4835-4860 (2004). hep-th/0402042
21. Dubrovskiy A., Volkov G. Ternary numbers and algebras. Reflexive numbers and Berger graphs, Adv.Appl.Clifford Algebras 17, 159-181 (2007)
22. Lipatov L.N., Traunbenberg M. Rausch de, Volkov G. On the ternary complex analysis and its applications . J. Math. Phys. 49, 013502 (2008), p.28.
23. Volkov G. On the complexifications of the Euclidean $R^n$ spaces and the n-dimensional generalization of Pythagore theorem, arXiv:1006.5630 [math-ph] (2010)
24. Samoylenko V., Volkov G. The GUT of the light: On the Abelian Complexifications of the Euclidean $R^n$ spaces, arXiv:0912.2037 [physics.gen-ph]
25. Volkov G. Ternary “Quaternions” and Ternary TU(3) algebra, arXiv:1006.5627 [math-ph]
26. Волков Г.Г., Кукин Н.С., Мурадова А.Р., Глотова И.О. Тернарная групповая алгебра. Комплексный анализ в Евклидовом пространстве // Известия Института инженерной физики, 2016. №3(41). С. 50-56.
27. Смуров С.В., Волков Г.Г., Кукин Н.С., Мурадова А.Р., Глотова И.О. Введение в геометрию N-арных комплексных чисел. // Известия Института инженерной физики, 2016. №2(40). С. 75-84.
28. Maslikov A.A., Volkov G.G. Ternary SU(3)-group symmetry and its possible applications in hadron-quark substructure. Towards a new spinor-fermion structure // EPJ Web of Conferences 204, 02007 (2019), https://doi.org/10.1051/epjconf/201920402007 .