В. Соловьев, С. Дворянинов, Что такое фазовый портрет, *Квант*, 2019, номер 11, 29–31

DOI: https://doi.org/10.4213/kvant20191104

Конечно, здесь не рассмотрены так называемые конвективные потоки – например, перенос тепла вместе с массой. Значит, речь идет о варке каши на спутнике или в падающем лифте, что, правда, не очень удобно.

Итак, в течение характерного времени τ и цельные зерна, и расплющенные или раскатанные в цилиндр прогреются до температуры кипения воды. Но что же происходит дальше? Ведь кипение продолжается, следовательно, что-то продолжает течь внутрь зерна. А там происходят сложные физико-химические процессы. Прежде всего, увлажнение, т.е. диффузия молекул воды, разрушение прежней бимолекулярной структуры, нежелательной для потребителя. Но раз что-то разрушается, значит, с точки зрения исходного зерна, растет «мера беспорядка» – так называемая энтропия. Физик при этом скажет, что имеет место поток энтропии. Тут вспоминается, что в научно-фантастических романах энтропия часто называется «черной», чтобы подчеркнуть ее разрушительный нрав. А в одной из пародий на такие романы при описании ситуации в космическом корабле сказано нечто такое:

Напряженно гудели слухофоны и смотроскопы. Сквозь заклепки сочились кванты. Черная энтропия росла. «Ба, – вдруг воскликнул штурман, – да ведь мы на краю обыкновенной гиперплоскости!»

Но вернемся к нашей каше. В кипящей воде в зерне подготавливаются новые вещества; можно сказать, что в результате перестройки они забрасываются на новый (более высокий) потенциальный уровень, «падая» с которого, выделят в нужное время необходимую организму энергию.

Итак, всюду потоки массы, энергии, импульса, энтропии. А плющенное зерно продолжает вариться …

Приятного аппетита!

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТАТИВ

Что такое фазовый портрет

В.СОЛОВЬЕВ, С.ДВОРЯНИНОВ

Бросаем мяч вверх

Рассмотрим простой эксперимент, который каждый из нас проводил в детстве много раз. Пусть тело, например мяч, масса которого равна m, брошено с поверхности земли вертикально вверх с начальной скоростью v_0. Пусть высота h, на которой находится тело в каждый момент времени t, определяется функцией $h = h(t)$. Тогда первая производная этой функции $h'(t) = v(t)$ – это скорость, вторая производная $h''(t) = v'(t) = a(t)$ – это ускорение. Согласно второму закону Ньютона,

$$a(t) = \frac{F}{m},$$

где F – действующая на тело сила. Если высота подъема невелика и можно пренебречь сопротивлением воздуха, то единственная сила, действующая на тело, это сила тяжести, равная mg. Тогда уравнение движения тела принимает вид

$$h''(t) = -g .$$

Знак «минус» в правой части уравнения отражает тот факт, что сила направлена в сторону уменьшения величины h. Интегрируя это уравнение, получаем общий закон движения тела:

$$h(t) = -\frac{gt^2}{2} + v_0 t + h_0 .$$

(Результат интегрирования легко проверить дифференцированием: $h''(t) = \left(-\frac{gt^2}{2} + v_0 t + h_0\right)'' = \left(-gt + v_0\right)' = -g$.)

В нашем уравнении v_0 – начальная скорость тела, т.е. скорость при $t = 0$; h_0 –

DOI: https://doi.org/10.4213/kvant20191104

начальная высота, у нас $h_0 = 0$. Следовательно, получаем

$$h(t) = -\frac{gt^2}{2} + v_0 t.$$

Ясно, что область определения квадратичной функции $h(t)$ – отрезок $0 \le t \le \frac{2v_0}{g}$, на котором эта функция неотрицательна. График этой функции на плоскости с координатами $(t;h)$ показан на рисунке 1.

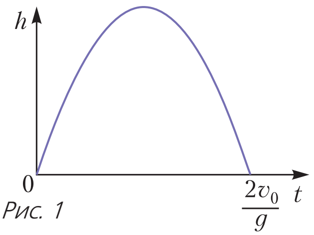

Рис. 1

Наблюдаем за энергией

Будем теперь следить не только за высотой h, но и за скоростью движения нашего тела, т.е. за величиной $h'(t) = v(t) = -gt + v_0$. Рассмотрим систему уравнений

$$\begin{cases} h = -\frac{gt^2}{2} + v_0 t, \\ v = -gt + v_0. \end{cases}$$

При каждом допустимом значении величины t, которую теперь можно считать параметром, мы имеем точку на плоскости с координатами $(h;v)$. Можно сказать, что эта система параметрическим образом задает кривую линию. Легко получить и явное задание этой кривой. Из второго уравнения системы находим $t = \frac{v_0 - v}{g}$ и подставляем в первое уравнение. В итоге получаем

$$h = \frac{v_0^2 - v^2}{2g}.$$

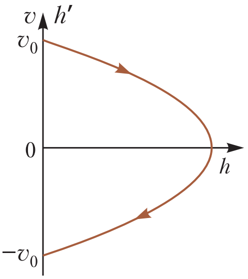

Рис. 2

Это уравнение на отрезке $-v_0 \le v \le v_0$ задает дугу параболы (рис.2). Стрелка на параболе указывает направление возрастания параметра t, т.е. ход времени.

После умножения обеих частей нашего уравнения на mg запишем его в виде

$$mgh + \frac{mv^2}{2} = \frac{mv_0^2}{2}.$$

Полученное равенство выражает закон сохранения энергии: первое слагаемое в левой части – это потенциальная энергия, второе – кинетическая энергия брошенного вверх тела. Их сумма – полная энергия – неизменна, в каждый момент времени она равна начальной кинетической энергии тела.

При движении нашего тела вверх действующая на него сила тяжести постоянна. Работа этой силы «съедает» любую начальную энергию тела, и поэтому при любой начальной скорости тело в определенный момент времени остановится и затем начнет падать обратно на землю.

Рисуем фазовый портрет

Ясно, что при разных значениях начальной скорости будут получаться дуги разных парабол (рис.3). Каждая дуга называется

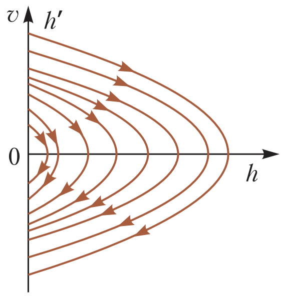

Рис. 3

фазовой траекторией рассматриваемой нами механической системы (т.е. брошенного вверх тела). Совокупность всех фазовых траекторий называется *фазовым портретом* динамической системы на фазовой плоскости. Заметим, что точка $(0;0)$ также является фазовой траекторией, она описывает состояние неподвижно находящегося на поверхности земли тела.

В верхней полуплоскости скорость положительна, фазовая точка движется вдоль фазовой траектории вправо, в сторону увеличения координаты h. В нижней полуплоскости – наоборот, фазовая точка движется влево, в сторону уменьшения фазовой координаты h. (Это хорошо согласуется с известным признаком монотонности функции: если производная положительна, то функция возрастает.)

Итак, первый урок по технике рисования фазовых портретов динамических систем состоялся. Поздравляем наших читателей, которые могут испытывать чувство гордости от знакомства с важным научным понятием, ибо о фазовых портретах и фазовых траекториях студенты университета узнают обычно только на втором курсе.

Учитываем гравитационное взаимодействие с Землей и летим в космос

Вспомним теперь, что в действительности на тело массой m, находящееся на расстоянии R от центра Земли, масса которой M, со стороны Земли действует сила притяжения, равная $G\dfrac{mM}{R^2}$. Тогда ускорение этого тела равно

$$a = -G\frac{M}{R^2}.$$

Знак «минус» опять говорит о том, что сила направлена в сторону уменьшения R. Пусть по-прежнему тело с некоторой начальной скоростью брошено с поверхности Земли вверх вдоль ее радиуса, т.е. в начальный момент времени при $t = 0$ расстояние R равно радиусу Земли: $R(0) = R_З$.

А каким может быть движение этого тела? Обязательно ли оно вернется на Землю? Если нет, то как будет меняться его скорость с течением времени?

Ответы на эти вопросы мы дадим чуть позже. А пока обратим внимание на то, что по мере удаления от Земли сила притяжения убывает, ее работа теперь не пропорциональна длине пути и поэтому, возможно, эта сила не сможет «забрать» всю энергию брошенного вверх тела.

Рассмотрим дифференциальное уравнение, описывающее изменение величины $R = R(t)$ в зависимости от времени:

$$R'' = -G\frac{M}{R^2}.$$

Это равенство выражает второй закон Ньютона. Мы помним, что для построения фазового портрета важна зависимость между координатой и скоростью, в данном случае – зависимость между величинами $R(t)$ и $R'(t)$. Эта зависимость такова:

$$\frac{R'^2}{2} = G\frac{M}{R} + c,$$

где c – произвольная постоянная. (Это соотношение получается интегрированием предыдущего равенства.) Положим $t = 0$ и получим

$$\frac{v_0^2}{2} = G\frac{M}{R_З} + c, \text{ откуда } c = \frac{v_0^2}{2} - G\frac{M}{R_З}.$$

Теперь закон движения тела можно записать в виде

$$\frac{\left(R'(t)\right)^2}{2} - G\frac{M}{R(t)} = \frac{v_0^2}{2} - G\frac{M}{R_З}.$$

Для понимания физического смысла последнего равенства обе его части умножим на m – массу брошенного тела, на которое действует сила тяготения:

$$\frac{m\left(R'(t)\right)^2}{2} - G\frac{mM}{R(t)} = \frac{mv_0^2}{2} - G\frac{mM}{R_З}.$$

Это уравнение выражает закон сохранения энергии. Первое слагаемое в левой части – это переменная кинетическая энергия, она связана со скоростью, второе слагаемое – переменная потенциальная энергия, правая часть – это полная энергия тела при $t = 0$.

Поясним, почему потенциальная энергия оказывается отрицательной. Потенциальная энергия считается всегда относительно какого-либо уровня. Так, кирпич, лежащий на балконе второго этажа, относительно этого балкона обладает нулевой потенциальной энергией, а относительно уровня тротуара – ненулевой. Мы вольны в выборе уровня отсчета. В нашем случае выбор таков, что при бесконечном удалении тела от Земли (т.е. при неограниченном увеличении R) его потенциальная энергия становится равной нулю. При произвольном значении $R = R^*$ потенциальная энергия отрицательна и равна $-G\dfrac{mM}{R^*}$. При перемещении тела из этой точки в бесконечность его потенциальная энергия, очевидно, увеличивается.

Рисуем фазовые траектории

Допустим, что $c = 0$, т.е. $v_0 = \sqrt{2G\dfrac{M}{R_З}} = v_2$.

Эта скорость называется второй космической скоростью. Соответствующая фазовая траектория показана на рисунке 4 красным цветом. Начав движение со скоростью v_2, тело бесконечно долго удаляется от Земли.

(Продолжение на с. 34)

(Начало на с. 29)

При этом его скорость убывает, стремясь к нулю. Допуская вольность речи, говорят, что тело остановится в бесконечности. Вто-

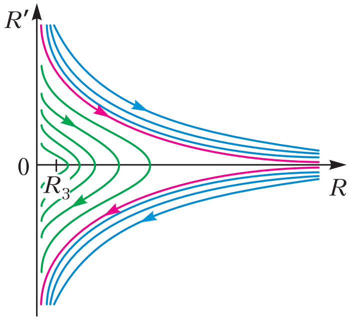

Рис. 4

рая космическая скорость – это минимальная скорость, позволяющая телу преодолеть влияние гравитационного поля Земли.

Ясно, что эта скорость своя для каждой планеты, ибо зависит от ее массы и радиуса.

Пусть теперь $c > 0$, т.е. начальная скорость больше второй космической. Тогда для любого положительного значения R существуют два значения скорости R'. Соответствующие точки $(R;R')$ лежат на двух ветвях фазовой траектории, которые на рисунке 4 показаны синим цветом – цветом бездонного неба. Нижняя ветвь описывает падение тела из бесконечности. Каждая ветвь имеет свою горизонтальную асимптоту. Опять говоря образно, скажем, что всякое тело, стартовавшее со скоростью $v_0 > v_2$, уйдет в бесконечность и будет там двигаться с некоторой скоростью.

Если же $c < 0$ (и $v_0 < v_2$), то значения R находятся в некотором конечном промежутке. Это означает, что запущенное с Земли тело сможет удалиться от нее лишь на конечное расстояние, на мгновение остановится и затем вернется на Землю. Вырваться из гравитационного поля Земли со столь малой скоростью невозможно. Соответствующие фазовые траектории показаны на рисунке 4 зеленым цветом – цветом зеленой травы. Траектории следует рассматривать в полуплоскости $R \geq R_3$.

Все траектории трех цветов и составляют фазовый портрет. Название красной траектории – сепаратриса. Она отделяет траектории одного типа от траекторий другого типа. Взяв любую точку $(R;R')$ в правой полуплоскости и рассмотрев проходящую через нее траекторию, можно легко увидеть эволюцию нашей динамической системы.

Заметим, что каждую траекторию легко построить элементарными методами, считая, что уравнение движения задает при каждом значении параметра c функцию R, зависящую от аргумента R'. Дело сводится к «делению единицы на квадратичную функцию».

О фазовой скорости и фазовом портрете можно прочитать в «Кванте» в статьях В.Арнольда «Эволюционные процессы и обыкновенные дифференциальные уравнения» («Квант», 1986, №2) и А.Веселова «О математике гармонических колебаний» («Квант», 1986, №5).

В заключение – фазовый портрет математического маятника

Рассмотрим жесткий невесомый стержень, на конце которого укреплена точечная масса m. Пусть такой маятник совершает колебания в вертикальной плоскости, $x(t)$ – угол отклонения стержня от вертикали, $x'(t)$ – скорость точки. Фазовый портрет такого маятника представлен на рисунке 5. На

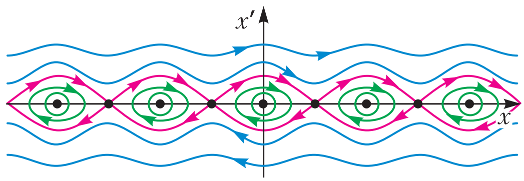

Рис. 5

фазовой плоскости $(x;x')$ точку $(0;0)$ окружают замкнутые траектории, они соответствуют малым колебаниям маятника. Через точки $(0;x_0')$ для больших значений начальной скорости проходят траектории, соответствующие вращательному движению маятника, при этом маятник совершает круговые колебания против или по часовой стрелке. Каждая точка $(\pi k;0)$ также является фазовой траекторией, соответствующей положению равновесия маятника. Нижнее положение устойчиво, верхнее – неустойчиво. Траектории красного цвета – это сепаратрисы, они отделяют вращательные траектории от колебательных. Отметим, что движение по сепаратрисе (которая имеет конечную длину!) длится бесконечно долго…

(Продолжение следует)