Космология Фридмана: горы реальные и потенциальные

С.ДВОРЯНИНОВ, В.СОЛОВЬЕВ

Динамика Вселенной

Теперь займемся зависимостью скорости расширения Вселенной от ее радиуса.

Сначала построим графики безразмерной функции безразмерного аргумента:

$$\frac{v}{c} = \sqrt{-1 + \frac{\beta}{3}\left(\frac{2}{x} + x^2\right)}.$$

Из рисунка 4 видно, что при $\beta = 1$ в точке Эйнштейна $x = 1$ скорость изменения радиуса мира нулевая, при $\beta = 1{,}1$ скорость уже никогда не обращается в ноль, при $\beta = 200$ скорость также не меняет знака, принимая намного большие значения по сравнению с предыдущим случаем. Конечно, независимо от β минимум скорости всегда находится в точке Эйнштейна $R = R_Э$, т.е. при $x = 1$.

Затем построим графики для величины, которую назовем безразмерной постоянной Хаббла (из следующего раздела будет понятно, почему):

$$\widetilde{H} = \frac{v}{cx} = \sqrt{-\frac{1}{x^2} + \frac{\beta}{3}\left(\frac{2}{x^3} + 1\right)}.$$

Как видно из рисунка 5, минимум этой функции достигается при $x = \beta$, т.е. при $R = R_g/\pi$.

Как уже говорилось в первой части статьи, график потенциальной энер-

Окончание. Начало – в предыдущем номере журнала.

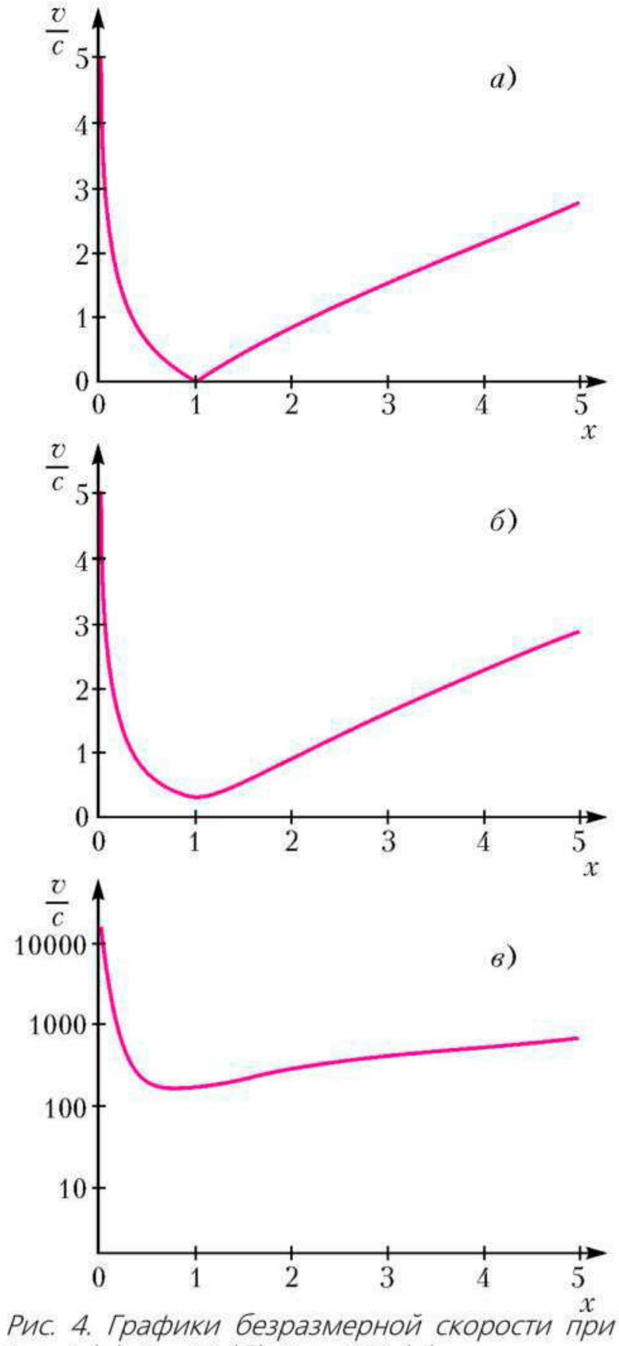

Рис. 4. Графики безразмерной скорости при $\beta = 1$ *(а),* $\beta = 1{,}1$ *(б),* $\beta = 200$ *(в)*

гии Вселенной напоминает крутую горку, по которой можно скатиться в бездну и слева и справа. Скатывание с горки справа налево соответствует все ускоряющемуся сжатию Вселенной, вплоть до нулевого радиуса; скатывание слева направо соответствует ускоренному расширению Вселенной, стремящейся к бесконечному радиусу. Достижима ли при движении слева направо вершина горы? Если максимум

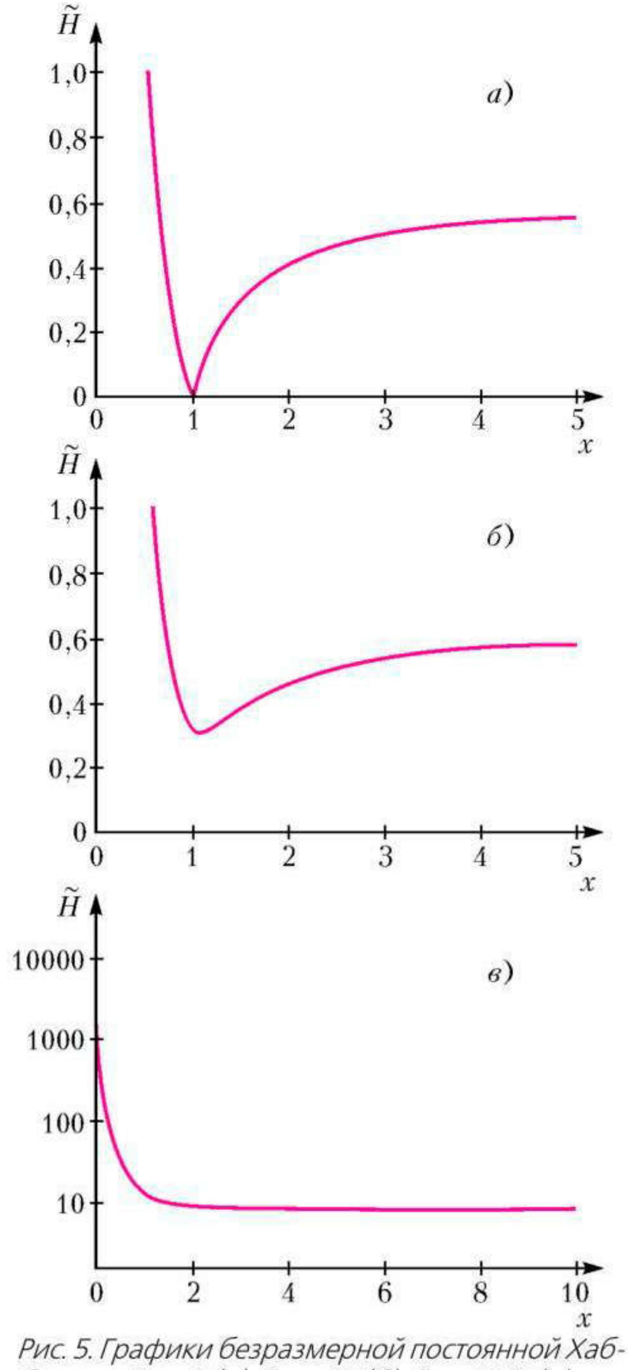

Рис. 5. Графики безразмерной постоянной Хаббла при $\beta = 1$ *(а),* $\beta = 1{,}1$ *(б),* $\beta = 200$ *(в)*

потенциальной энергии лежит выше значения полной энергии, то вершина недостижима. Это значит, что брошенное тело упадет обратно, а Вселенная, начавшая в момент Большого взрыва расширяться с бесконечной скоростью, будет постепенно замедляться, замрет на мгновение и покатится, наращивая скорость, обратно к нулевому радиусу. Это происходит при $0 < \beta < 1$.

Пройдет ли Вселенная через эту точку и начнет ли расширяться снова, повторяя цикл за циклом? Фридман допускал такую возможность, вспоминая индусскую мифологию о периодах жизни. Интегрируя, он вычислил так называемый период мира; принимая предложенную английским астрономом Артуром Эддингтоном среднюю плотность вещества и считая космологическую постоянную нулевой, получил 10000000000 лет. Этот сценарий Фридман назвал «периодическим миром».

Можно, конечно, думать, что падение нашего пробного тела приведет к смерти Вселенной. Если точка Эйнштейна лежит ниже значения полной энергии, что происходит при $\beta > 1$, то брошенное тело улетит в бесконечность, а Вселенная, соответственно, начав расширяться с бесконечной скоростью, будет сначала постепенно уменьшать скорость расширения, но затем, перевалив через вершину горы, снова начнет ускоряться. Этот сценарий Фридман назвал «монотонным миром первого рода».

Наконец, «монотонный мир второго рода» соответствует картине, когда тело начинает движение с нулевой начальной скоростью с правого склона горы и скатывается по нему с ускорением. «Большого взрыва» и горячей ранней Вселенной в этом сценарии нет, поэтому он не согласуется с наблюдениями. Добавим, что в ОТО допустим не только мир положительной кривизны, но и миры с отрицательной и нулевой кривизной. В нашей механической задаче это означает, что полная энергия тела может быть равна $mc^2/2$ или нулю. Оба эти случая гарантируют прохождение точки Эйнштейна и, значит, оставляют в силе только сценарий «монотонного мира первого рода».

Почему, обсуждая космологию, мы опираемся на Фридмана, а не на Эйнштейна, предложившего свое решение проблемы пятью годами раньше? Потому, что решение Эйнштейна было ошибочным. Оно описывало застывшую в точке – точке Эйнштейна – Вселенную, т.е. случай, когда наше пробное тело кто-то аккуратно поместил в ту самую точку, где силы притяжения и отталкивания уравновешивают друг друга, иначе говоря, положил его на вершину потенциальной горы. Чтобы это вообще было возможно, надо еще и подогнать точку Эйнштейна под значение полной энергии, т.е. связать три числа: радиус мира R, космологическую постоянную λ и массу мира M двумя уравнениями. В нашем рассмотрении эти два уравнения выглядят так:

$$\beta = 1,\ x = 1,$$

или

$$R_g = \pi R_Э,\ R = R_Э.$$

Но каждый школьник знает, что положение на вершине является неустойчивым равновесием, а значит, рано или поздно тело покатится вниз.

Космологическую постоянную λ, т.е. силу всемирного отторжения, Эйнштейн ввел нарочно, изменив первоначальные уравнения ОТО ради того, чтобы получить для нас мир вечный и неизменный. Но все оказалось зря. Так интуиция иногда обманывает даже самые сильные умы. Не обманывает только математика! А космологическая постоянная спустя 80 лет все-таки пригодилась. В конце 1990-х годов было открыто ускоренное расширение Вселенной. Это значит, что точка Эйнштейна в ходе эволюции мира уже пройдена. Нам кажется, что случай Эйнштейна наглядно изображен на заставке к этой статье.

Несколько чисел

Спустя три месяца после открытия уравнений динамики Вселенной Фридман выпускает для широкой публики книгу «Мир как пространство и время». Она начинается цитатой из Козьмы Пруткова, а заканчивается стихами Г.Р.Державина. В конце книги Фридман пишет:

«Теория Эйнштейна оправдывается на опыте; она объясняет старые, казавшиеся необъяснимыми явления и предвидит новые поразительные соотношения. Вернейший и наиболее глубокий способ изучения, при помощи теории Эйнштейна, геометрии мира и строения нашей Вселенной состоит в применении этой теории ко всему миру и в использовании астрономических исследований. Пока этот метод немногое может дать нам… Но в этих обстоятельствах нельзя не видеть лишь затруднений временных; наши потомки, без сомнения, узнают характер Вселенной, в которой мы обречены жить…»

Теперь можно дополнить получившуюся картину современными оценками параметров эволюции Вселенной. При жизни Фридмана (он умер в 1925 г.) о них не было известно ничего. Сейчас у нас есть данные о постоянной Хаббла, о процентном отношении вкладов материи, включая невидимую нами темную материю, и о темной энергии, роль которой, возможно, играет космологическая постоянная.

Постоянная Хаббла H названа в честь американского астронома Эдвина Хаббла, работавшего на крупнейшем в то время оптическом телескопе в обсерватории Маунт-Вилсон. В 1929 году он обнаружил прямую пропорциональность скорости v убегания галактик расстоянию r до них: $v = Hr$. В наших обозначениях: $H = R'/R$. Современное значение постоянной Хаббла составляет $H \approx 2{,}5 \cdot 10^{-18}$ с$^{-1}$ (но чаще H выражают в км/с на мегапарсек, тогда $H \approx 67$ (км/с)/Мпк).

Темная энергия, которая, возможно, сводится к космологической постоянной, составляет примерно 70% полной плотности энергии. Вещество, включающее в себя и невидимую загадочную темную материю, дает примерно 30%. Есть еще излучение, плотность энергии которого убывает при расширении Вселенной как $1/R^4$, но его вкладом в первом приближении мы можем пренебречь. Вклад кривизны пространства не превышает 0,4%, поэтому пространство обычно предполагается плоским. Мы, однако, для наглядности сохраним за переменной R титул радиуса мира и будем считать пространство Вселенной трехмерной сферой, вслед за Эйнштейном и Фридманом (точнее, вслед первой работе Фридмана).

В нашей механической модели Вселенной соотношение между темной энергией и энергией вещества есть отношение потенциальных энергий

$$\frac{U_{\text{анти-Гук}}}{U_{\text{Ньютон}}} = \frac{m\omega^2 R/2}{\alpha GmM/R^2} = \frac{1}{2}\left(\frac{R}{R_{\text{Э}}}\right)^3 = \frac{x^3}{2} \approx \frac{70\%}{30\%} \approx 2{,}3,$$

следовательно, $x \approx \sqrt[3]{4{,}6} \approx 1{,}7$.

Соотношение между вкладом кривизны (у нас в механической задаче это полная энергия) и вкладом вещества

$$\frac{|E|}{U_{\text{Ньютон}}} = \frac{1}{2\beta/(3x)} = \frac{3x}{2\beta} < 0{,}013$$

дает нам оценку $\beta > 190$. Для безразмерной постоянной Хаббла $\widetilde{H}$, график зависимости которой от x мы строили при разных значениях β (см.

рис.5), получаем

$$\widetilde{H} = \frac{v}{cx} = H\frac{R_Э}{c} \approx 0{,}77 \cdot 10^{-26} R_Э ,$$

если $R_Э$ выражено в метрах. Из приведенной ранее формулы для $\widetilde{H}$ получаем

$$\widetilde{H}\,(x = 1{,}7) \approx 0{,}68\sqrt{\beta} > 9{,}4 ,$$

следовательно, $R_Э > 1{,}2 \cdot 10^{27}$ м, или в более адекватных единицах – мегапарсеках $R_Э > 6 \cdot 10^4$ Мпк.

Таким образом, из данных о постоянной Хаббла мы можем получить оценку радиуса мира: $R > 1{,}7 R_Э \approx$ $\approx 10^5$ Мпк, или $R > 2 \cdot 10^{27}$ м. Для массы мира получаем $M > 1{,}5 \cdot 10^{57}$ кг, для космологической постоянной Эйнштейна – $\lambda = 3\omega^2 = 1{,}3 \cdot 10^{-35}\,\text{с}^{-2}$, для гравитационного радиуса Вселенной – $R_g > 3{,}6 \cdot 10^7$ Мпк.

Рождение Вселенной из ничего?

«…является возможность также говорить о “сотворении мира из ничего”, но все это пока до́лжно рассматривать как курьезные факты, не могущие быть солидно подтвержденными недостаточным астрономическим экспериментальным материалом…» – так говорится в упомянутой выше книге А.Фридмана.

В обеих наших моделях космологии было что-то искусственное. В примере с катанием на санях кто-то должен разогнать сани, во втором примере кто-то должен выстрелить из рогатки… Не следует ли представить все проще? Например, чтобы перевалить через одну горку, не лучше ли будет сначала забраться на горку более высокую и начать спуск оттуда? Тогда будет понятно, откуда взялись огромная кинетическая энергия и огромная по модулю, но отрицательная, потенциальная энергия. Причем начальная полная энергия может быть очень малой и даже нулевой. Вселенная может родиться… из ничего!

Приблизительно об этом говорит сценарий так называемой инфляции, когда Вселенная рождается как флуктуация вакуума и за первые 10^{-30} с своего существования увеличивает свои размеры более чем в 10^{30} раз. В этом сценарии вся огромная масса вещества Вселенной рождается при распаде первичного вакуума и переходе от эпохи инфляции к эпохе Фридмана. На рисунке 6 приведен примерный график

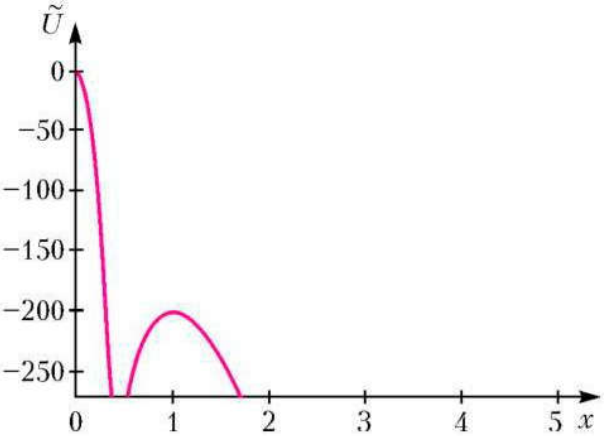

Рис. 6. График потенциальной энергии для сценария инфляции

зависимости безразмерной потенциальной энергии $\widetilde{U}$ от безразмерного радиуса Вселенной x для сценария инфляции.

Эпилог

Так ли проста космология, как было представлено выше? Конечно, здесь сказано далеко не все. Вещество, которое Эйнштейн, за ним Фридман и мы с вами считали пылью, на самом деле включает в себя и излучение и ведет себя по-разному при разных плотностях и температурах. Мы не знаем доподленно, что происходит в мире элементарных частиц при энергиях на много порядков выше тех, которые доступны современным ускорителям.

(Окончание см. на с. 23)

статьи. Мы же приведем следующее геометрическое рассуждение, из которого можно вывести сохранение площади.

Рассмотрим криволинейную трапецию – «чешуйку» ширины t, ограниченную вертикальными прямыми, находящимися на расстоянии t друг от друга, и параболами $y = x^2 + b$, $y = x^2 + b + s$, где $s > 0$ (рис.5). Тогда площадь чешуйки равна ts.

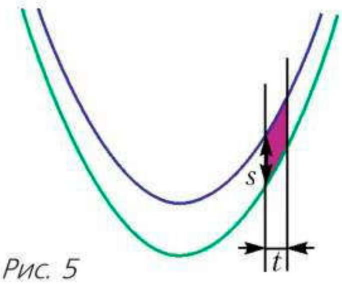

Рис. 5

Упражнение 5. Докажите это.

Указание. Разрежьте горизонталями чешуйку на части, переложив которые можно получить прямоугольник $t \times s$.

При параболическом повороте любая вертикальная прямая сдвигается на k по горизонтали, значит, наша чешуйка перейдет в новую чешуйку той же ширины t, зажатую между теми же параболами. Как видим, площадь новой чешуйки тоже равна ts. Итак, площади чешуек, зажатых между вертикальными прямыми и параболами вида $y = x^2 + c$, сохраняются. Можно создать мелкую «криволинейную» сетку из таких чешуек (рис.6) и приближать заданную

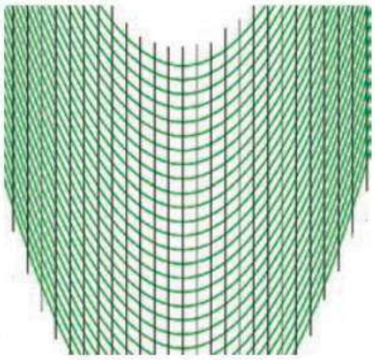
Рис. 6

фигуру набором чешуек (подобно тому, как при определении площадей сложных фигур фигура приближается набором ячеек мелкой квадратной сетки) – и вывести из сохранения площадей для чешуек сохранение площадей для любых фигур.

Итак, все три ключевых момента для решения готовы, теперь дело за малым.

Упражнения

6. Сформулируйте аналог упражнения 2, докажите его и завершите решение **задачи о параболах**.

7. Сформулируйте и докажите факт про середину отрезка, аналогичный упражнению 3.

В завершение предлагаем читателю придумать аналогичные пространственные задачи об эллипсоидах, гиперболоидах, параболоидах и объемах, отсекаемых касательными плоскостями.

(Начало см. на с. 9)

В ранней Вселенной имели место грандиозные фазовые переходы, распад вакуума и рождение из него новых и новых частиц. Эволюция Вселенной является неравновесным и необратимым процессом.

Первым физиком, всерьез обратившим на это внимание, был Георгий Гамов, которому, вместе с учениками, удалось вывести соотношение между количествами легких элементов системы Менделеева во Вселенной, предсказать существование реликтового излучения и правильно оценить его температуру.

Но это отдельная история...

Литература

1. Письма и рукописи А.Фридмана в архиве П.Эренфеста (www.lorentz.leidenuniv.nl/history/Friedmann_archive/)

2. *А.А.Фридман.* Мир как пространство и время (5-е изд.) (М.: Либроком, 2009)

3. Номер журнала «Успехи физических наук», посвященный 75-летию Фридмана (т.80, в.3, 1963)

4. *Э.А.Тропп, В.Я.Френкель, А.Д.Чернин.* Александр Александрович Фридман: Жизнь и деятельность (2-е изд.) (М.: КомКнига, 2006)

5. *А.Беленький.* «Воды, в которые я вступаю, не пересекал еще никто». Александр Фридман и истоки современной космологии (электронный журнал «Наука из первых рук», № 5(47), 2012)

6. *В.О.Соловьев.* Как Фридман Эйнштейна подковал (журнал «Наукоград», №4(6), 2015)

7. *М.В.Сажин.* Современная космология в популярном изложении (М.: УРСС, 2002)

8. *А.Д.Долгов.* Космология: от Померанчука до наших дней (УФН, т.184, 2014)