Космология Фридмана: горы реальные и потенциальные

С.ДВОРЯНИНОВ, В.СОЛОВЬЕВ

В 2015 ГОДУ ИСПОЛНИЛОСЬ 100 ЛЕТ общей теории относительности – ОТО, предложенная Альбертом Эйнштейном. Александр Александрович Фридман в 1922 году получил из десяти довольно сложных уравнений ОТО два уравнения, описывающие рождение, жизнь и смерть наблюдаемой Вселенной. Они стали фундаментом бурно развивающейся науки – космологии. Оказывается, что уравнения Фридмана можно получить не только в теории Эйнштейна, но и в привычной нам классической механике.

Модель первая: катание с гор

Представьте невысокую ледяную горку и хорошо скользящие санки (летом их можно заменить на скейт). Вы разгоняетесь, взлетаете на самую вершину горки, а потом по инерции скатываетесь с противоположного склона. Ваша скорость уменьшается при подъеме и увеличивается при спуске – об этом говорит нам и жизненный опыт, и формула закона сохранения механической энергии

$$\frac{mv^2}{2} + U = E \, .$$

Здесь первое слагаемое в левой части это кинетическая энергия, второе – потенциальная, а в правой части – полная механическая энергия. Во многих школьных задачах считается, что полная механическая энергия сохраняется неизменной, причем точно. В жизни, конечно, это выполняется приблизительно – тем точнее, чем меньше трение. Если бы трения не было совсем, то санки никогда бы и не остановились. Потенциальную энергию тяготения обычно рассматривают как функцию высоты. Однако достаточно нарисовать сечение горки вертикальной плоскостью, проходящей через траекторию саней, наложить на рисунок оси координат – и высота станет функцией от горизонтальной координаты x. Значит, подобрав соответствующий масштаб, мы получим график потенциальной энергии

$$U(x) = mgh(x).$$

И наоборот. Если дан график потенциальной энергии для некоторого тела, положение которого может быть задано одной координатой, то, не задумываясь о том, какой силе соответствует эта потенциальная энергия, мы можем отождествить движение тела с движением санок по реальным горам или ямам, имеющим изображенный на данном графике профиль. Далее, закон сохранения энергии позволит выразить кинетическую энергию одномерного движения как функцию координаты тела. Конечно, нужно также знать и полную энергию, которую можно найти по начальным данным: координате и скорости. Масса тела тоже должна быть известна. А по кинетической энергии можно определить скорость, правда с точностью до знака, так как направлений движения может быть два.

На рисунке 1 показаны три кривые, изображающие график потенциальной энергии, заданной функцией от координаты R:

$$U(R) = -\frac{a}{R} - \frac{bR^2}{2}$$

при трех разных значениях параметра b, причем рассматривается случай $a > 0$, $b > 0$. Горизонтальные линии иллюстрируют возможность положительной, нулевой и отрицательной полной энергии. Конечно, кататься с такой горы можно только в мыслях – с обеих сторон вы покатитесь в бездну. Однако ниже мы покажем, в каких

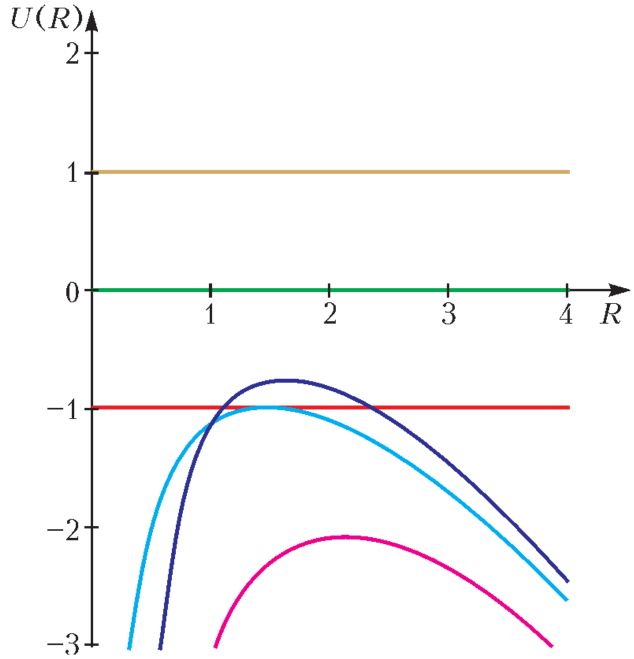

Рис. 1. Примеры графиков потенциальной энергии

именно физических задачах может встретиться обсуждаемая формула для потенциальной энергии.

Модель вторая: стрельба из рогатки в открытом космосе

Сначала рассмотрим совсем простой случай: $b = 0$. Пусть в космосе есть однородный шар массой M и с него вдоль направления его радиуса выстреливают пробным телом массой m. Будем полагать $m \ll M$, тогда шар можно считать неподвижным. Учтем закон всемирного тяготения Ньютона в его полном виде, т.е. силу тяжести будем считать не постоянной, как вблизи поверхности Земли, а зависящей от расстояния R между центрами обоих тел:

$$F = -\frac{GMm}{R^2},$$

где $G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}$ Н $\cdot$ м^2/кг^2 – гравитационная постоянная. Знак “минус” должен напомнить нам, что направление силы, действующей на тело массой m, противоположно радиусу-вектору этого тела, проведенному из центра тела массой M. Потенциальная энергия нашего пробного тела будет определяться формулой

$$U(R) = -\frac{GMm}{R}.$$

Здесь мы считаем, что потенциальная энергия стремится к нулю при неограниченном возрастании R. Для тех, кто умеет дифференцировать, заметим, что если известна потенциальная энергия, то силу можно найти, вычислив производную: $F = -U'(R)$.

Как будет двигаться наше подброшенное тело? Есть ровно три возможности: при $E < 0$ тело вернется и упадет на свое прежнее место; при $E = 0$ оно улетит бесконечно далеко и там остановится; наконец, при $E > 0$ тело продолжит движение и на бесконечности. Во втором случае начальная скорость тела называется второй космической. Если тяжелым телом будет Земля, а пробное тело бросают с ее поверхности и пренебрегают сопротивлением атмосферы, то величина второй космической скорости будет равна

$$v_{\mathrm{II}} = \sqrt{\frac{2GM}{R_0}} \approx 11200 \text{ м/с} = 11{,}2 \text{ км/с},$$

где $R_0 \approx 6{,}38 \cdot 10^6$ м – радиус Земли, $M \approx 5{,}98 \cdot 10^{24}$ кг – масса Земли.

Заметим, что последняя формула, несмотря на то что она была получена на основе механики Ньютона и без всякой связи с теорией относительности, может быть использована для нахождения гравитационного радиуса тела в ОТО. Достаточно вместо v_{II} подставить скорость света $c = 3 \cdot 10^8$ м/с и мы получим гравитационный радиус тела массой M:

$$R_g = \frac{2GM}{c^2}.$$

Если тело сжать до размеров гравитационного радиуса, то никакие силы не смогут остановить его дальнейшего сжатия под действием сил тяготения. Согласно ОТО, даже свет не может улететь от тела, радиус которого меньше R_g. Предоставим читателям возможность самостоятельно вычислить этот радиус, например, для Земли или для Солнца.

Модель третья: Ньютон против анти-Гука

Пусть теперь $b \neq 0$ в нашей формуле для потенциальной энергии. Что может означать второе слагаемое в этой формуле? Для $b < 0$ оно положительно и напоминает потенциальную энергию пружины. Воображаемая пружина тянет брошенное тело назад к центру шара с силой, подчиняющейся закону Гука $F = -kR$, причем $k = |b|$. Нас, однако, будет интересовать другой, весьма необычный случай: $b > 0$, который и отражен на рисунке 1. Тогда соответствующая сила должна отталкивать пробное тело от центра шара и возрастать с увеличением расстояния по закону $F = +bR$. В космологии аналогично ведет себя так называемая темная энергия. В задаче о брошенном теле мы позволим себе назвать это законом анти-Гука. Точку, в которой силы притяжения и отталкивания уравновешивают друг друга, уместно, как будет видно из дальнейшего, назвать точкой Эйнштейна.

Теперь, наконец, выпишем обещанные уравнения динамики Вселенной, полученные Фридманом из общей теории относительности, сохраняя все использованные им обозначения:

$$\frac{R'^2}{R^2} + \frac{2R''R}{R^2} + \frac{c^2}{R^2} - \lambda = 0, \qquad (1)$$

$$\frac{3R'^2}{R^2} + \frac{3c^2}{R^2} - \lambda = \frac{\kappa}{2}c^2\rho. \qquad (2)$$

Здесь $\kappa = 16\pi G/c^2$, R – так называемый радиус мира (сейчас принят другой термин – масштабный множитель), ρ – средняя плотность вещества во Вселенной, λ – космологическая постоянная, введенная Эйнштейном. Штрихи обозначают производные по времени, т.е. $R' = v$ – скорость изменения радиуса мира, а $R'' = a$ – соответствующее ускорение. Дальше мы постараемся убедить вас в том, что, даже не решая, а только обдумывая эти уравнения и построив по ним несколько графиков, можно понять закон эволюции Вселенной.

Будем предполагать, вслед за Эйнштейном и Фридманом, что Вселенная равномерно заполнена пылью, не создающей давления, что пространство одинаково в любой точке и по любому направлению, имеет постоянную положительную кривизну и простейшую топологию, а значит, оно подобно трехмерной сфере. Не советуем мучиться и пытаться себе ее вообразить –лучше представьте себя двумерным существом, живущим на поверхности обычного шара. Аналогом площади $4\pi R^2$ двумерной сферы служит объем сферы трехмерной: $V_3 = 2\pi^2 R^3$.

Ясно, что уравнения Фридмана можно преобразовывать. Например, воспользовавшись вторым уравнением, можно исключить из первого R'. Можно, конечно, умножать и делить уравнения на выражения, отличные от нуля. Давайте, вслед за Фридманом, введем полную массу вещества во Вселенной: $M = \rho V_3 = \rho \cdot 2\pi^2 R^3$. Эта величина сохраняется при изменении радиуса мира R, что следует из приведенных уравнений Фридмана, если применить дифференцирование. После выражения плотности через массу и радиус мира, переобозначения космологической постоянной в виде $\lambda = 3\omega^2$ и умножения обеих частей уравнений на массу воображаемой частицы m мы приходим к таким формулам:

$$ma = -\alpha\frac{GmM}{R^2} + m\omega^2 R, \qquad (3)$$

$$\frac{mv^2}{2} = E - U(R), \qquad (4)$$

где

$$U(R) = -\alpha\frac{GmM}{R} - \frac{m\omega^2 R^2}{2}, \qquad (5)$$

$$E = -\frac{mc^2}{2}.$$

Мы видим, что уравнения Фридмана (1) и (2) для Вселенной после преобразований почти совпадают с уравнениями классической механики для частицы массой m, движущейся радиально под действием силы притяжения Ньютона и силы отталкивания анти-Гука (модель третья). В частном случае $\lambda = 3\omega^2 = 0$ модель третья сводится к модели второй. – формула (3) есть второй закон Ньютона, а уравнение (4) – закон сохранения механической энергии. Единственное отличие заключается в появлении перед гравитационной постоянной G множителя $\alpha = 2/(3\pi) \approx 0,21$, который возникает из-за замены выражения $V = (4/3)\pi R^3$ для объема шара в евклидовом пространстве на объем трехмерной сферы $V_3 = 2\pi^2 R^3$. Появление $\alpha = V/V_3$ равносильно небольшому изменению гравитационной постоянной: $G \to \alpha G$ и никак не отражается на качественной картине движения частицы, иллюстрирующего в нашей статье расширение Вселенной.

Новизна ОТО состоит, в частности, в том, что закон сохранения энергии оказывается одним из десяти уравнений этой теории, а при принятых Эйнштейном предположениях (о том, что Вселенная в среднем одинакова во всех ее точках и во всех направлениях) этот закон выражается уравнением (2). И если в классической механике мы должны интегрировать по времени, чтобы вывести закон сохранения энергии из второго закона Ньютона, то в ОТО никакого интегрирования не требуется, все уже готово. Здесь энергия не вычисляется по свободно задаваемым начальным данным, а наоборот, эти данные оказываются связанными известным заранее значением энергии – здесь, например, $E = -\frac{mc^2}{2}$. Именно уравнение (2) является основным для космологии, именно оно называется в научной литературе уравнением Фридмана.

Потенциальные горы для Вселенной

Как должна вести себя Вселенная, подчиненная законам Фридмана? Оказывается так же, как брошенное в радиальном направлении от большой точечной массы M тело массой m с потенциальной энергией (5), подчиненное законам механики Ньютона. Заметим, что эти законы не запрещают движение со скоростью, сколь угодно большей скорости света. Правда, для лучшего сходства с эволюцией Вселенной нам придется считать началом полета тела ситуацию, когда расстояние R почти равно нулю, скорость $v = R'$ почти равна бесконечности, но полная энергия конечна и равна минус $mc^2/2$ (однако, возможна и иная точка зрения – об этом будет рассказано во второй части этой статьи). Обратите внимание, что при такой постановке задачи тяжелое, но точечное тело массой M играет роль всего вещества Вселенной, а движение тела массой m описывает изменение геометрии Вселенной. При этом динамика геометрии (геометродинамика) определяется количеством вещества. Вы заметили, что, согласно уравнениям (3), (4), масса движущегося тела m никак не скажется на его движении?

Разделив уравнение (4) на модуль полной энергии тела, т.е. на $mc^2/2$, и вводя безразмерную переменную $x = R/R_Э$, где $R_Э = \sqrt[3]{\frac{\alpha GM}{\omega^2}}$ – координата точки Эйнштейна, мы получим уравнение, связывающее безразмерные величины:

$\widetilde{E}_{кин} = -1 - \widetilde{U}$ или

$$\frac{v^2}{c^2} = -1 + \frac{\beta}{3}\left(\frac{2}{x} + x^2\right),$$

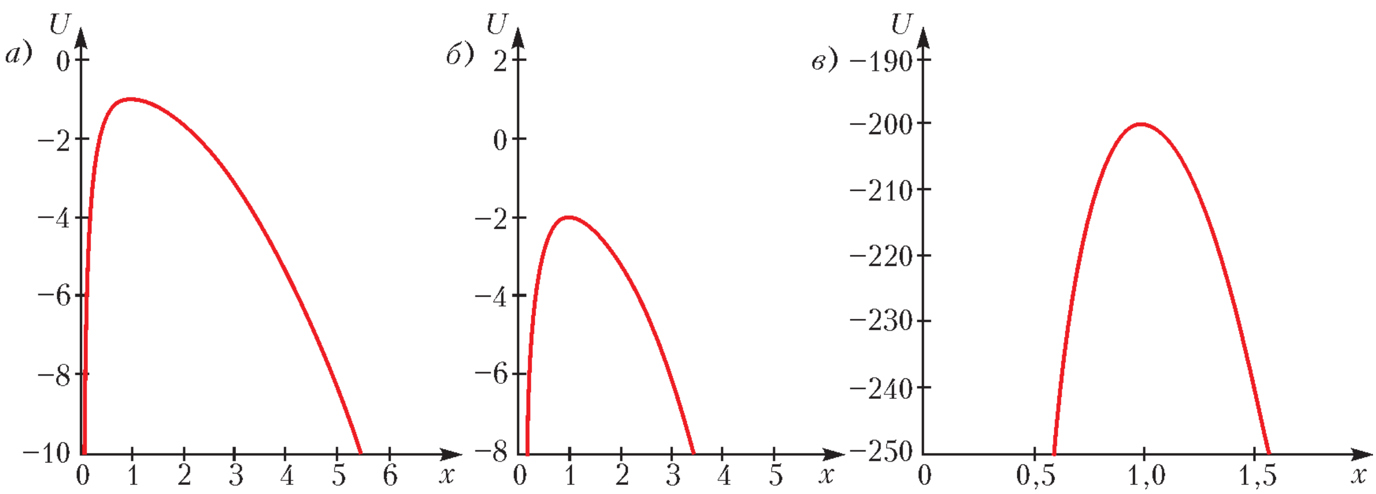

Рис. 2. Графики безразмерной потенциальной энергии: а) при $\beta = 1$, б) при $\beta = 2$, в) при $\beta = 200$

где

$$\widetilde{E}_{\text{кин}} = \frac{v^2}{c^2}, \ \widetilde{U} = \frac{U}{|E|} = -\frac{\beta}{3}\left(\frac{2}{x} + x^2\right),$$

$$\beta = \frac{R_g}{\pi R_Э}.$$

Построим графики зависимости безразмерной потенциальной энергии от безразмерного радиуса Вселенной при разных значениях параметра β (рис.2). Случай $\beta = 1$ соответствует желанию Эйнштейна получить неизменную Вселенную: уровень безразмерной полной энергии $E = -1$ касается вершины горы. Случай $\beta = 2$ дает небольшое, но качественное отличие от предыдущего: уровень безразмерной полной энергии $E = -1$ лежит выше кривой. Случай $\beta = 200$ учитывает современные данные – точнее, в отличие от предыдущих примеров, не противоречит им, здесь уровень безразмерной полной энергии *намного выше* вершины горы. Из рисунка 2 видно, что максимум потенциальной энергии всегда находится в точке Эйнштейна, т.е. при $x = 1$.

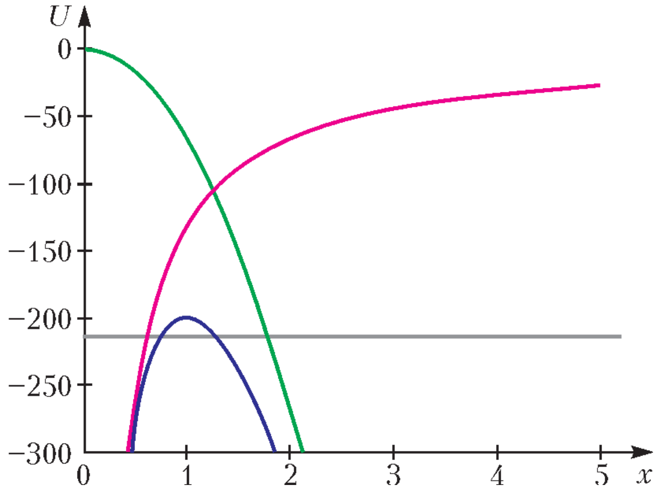

Рис. 3. Потенциальные энергии Ньютона (красная линия), анти-Гука (зеленая линия) и их сумма (синяя линия) при $\beta = 200$

Для большей наглядности построим теперь по отдельности потенциальные энергии Ньютона (гипербола) и анти-Гука (перевернутая парабола), а также и их сумму (рис.3).

(Продолжение следует)