ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ
И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ
ФИЗИКА
Том 191, № 2
май, 2017

 В. О. Соловьев*

ЭВОЛЮЦИЯ УРАВНЕНИЙ ДИНАМИКИ ВСЕЛЕННОЙ: ОТ ФРИДМАНА ДО НАШИХ ДНЕЙ

Отмечая столетие общей теории относительности, нельзя не вспомнить о том, что самым сильным ее предсказанием стало открытие Фридманом уравнений эволюции Вселенной. Эти уравнения остаются и в наши дни фундаментом современной космологии. Однако данные новых наблюдений стимулируют поиск модифицированных теорий гравитации. Мы обсуждаем космологические аспекты теорий с двумя динамическими метриками и теорий массивной гравитации, одну из которых развили Логунов с сотрудниками.

Ключевые слова: космология, теория гравитации, биграввитация, биметрическая гравитация, гамильтонов формализм, массивная гравитация.

DOI: https://doi.org/10.4213/tmf9179

1. ВВЕДЕНИЕ

В 1922 г. Фридман отправил Эренфесту в Лейден письмо и рукопись статьи “О кривизне Вселенной” [1]. И то, и другое было написано на русском языке и сейчас общедоступно. Немецкий перевод [2] этой работы был представлен Эренфестом в лучший физический журнал и вскоре опубликован. Впервые идея об эволюции Вселенной из области мифологии и религии перешла в область точных наук. Это открытие стало возможным благодаря созданию в 1915 г. новой физической теории – общей теории относительности (ОТО), созданной усилиями Эйнштейна при существенном участии математиков Гроссмана и Гильберта. Несмотря на Первую мировую войну, в окружении Гильберта работал ученый из России – барон Фредерикс, сыгравший определяющую роль в появлении в Петрограде первого семинара по изучению ОТО. Ранняя смерть Фридмана помешала созданию задуманной двумя авторами большой монографии, вышла только ее первая часть. Безусловно, в иной ситуации можно было бы ожидать активного участия русской школы в обсуждении результатов Хаббла и других астрономов, подтвердивших расширение Вселенной.

Настоящая статья написана по материалам доклада на семинаре, посвященном памяти академика А. А. Логунова и 100-летию общей теории относительности, прошедшем в отделе теоретической физики Курчатовского института в Протвино 19 ноября 2015 г.

*Институт физики высоких энергий, НИЦ “Курчатовский институт”, Протвино, Московская обл., Россия. E-mail: Vladimir.Soloviev@ihep.ru

Другой причиной торможения развития космологии в СССР была все более опасная активность ряда так называемых философов, взявших на себя, по выражению Капицы [3], функции милиции.

2. УРАВНЕНИЯ ФРИДМАНА

Неудача Эйнштейна в решении космологической задачи и триумф Фридмана были объективно обусловлены возрастанием значения математики в теоретической физике. Метод Эйнштейна заключался в построении мысленных экпериментов и опирался на физическую интуицию. Картина вечного и неизменного мира была для Эйнштейна аксиомой. А уравнения ОТО были математической конструкцией и, следовательно, не были в той же степени бесспорны. Эйнштейн позволил себе исправить их и ввел космологическую постоянную для согласия с той картиной мира, в которую верил. Фридман подошел к решению проблемы как математик, для которого аксиомой являются уравнения, а задачей является нахождение общего решения. Разумеется, при заданных (например, физиками) дополнительных ограничениях. Фридман обнаружил, что условия однородности и изотропности метрики и распределения материи не противоречат изменению радиуса мира со временем, и получил следующие два уравнения эволюции:

$$
\begin{aligned}
&\frac{R'^2}{R^2} + \frac{2R''R}{R^2} + \frac{c^2}{R^2} - \lambda = 0, \\
&\frac{3R'^2}{R^2} + \frac{3c^2}{R^2} - \lambda = \frac{\kappa}{2} c^2 \rho.
\end{aligned}
\tag{1}
$$

Здесь c – скорость света, $\kappa = 16\pi G/c^2$, G – гравитационная постоянная Ньютона, R – “радиус мира” (или масштабный множитель), ρ – средняя плотность вещества во Вселенной, λ – космологическая постоянная, введенная Эйнштейном. Штрихи обозначают производные по времени. Разумеется, такая запись была обусловлена желанием Фридмана соблюсти прямую преемственность с десятью уравнениями ОТО. Нетривиальными оказываются только их 00- и 11-компоненты. Для доказательства можно подставить метрику в виде

$$
ds^2 = R^2(x_4)(dx_1^2 + \sin^2 x_1\, dx_2^2 + \sin^2 x_1 \sin^2 x_2\, dx_3^2) + \mathcal{M}^2(x_1, x_2, x_3, x_4)\, dx_4^2 \tag{2}
$$

в уравнения ОТО, считая, что

$$
T_{44} = c^2 \rho g_{44}, \tag{3}
$$

а остальные $T_{ik} = 0$. Тогда 14-, 24- и 34-компоненты уравнений ОТО приводят к соотношениям

$$
R'(x_4)\, \frac{\partial \mathcal{M}}{\partial x_1} = R'(x_4)\, \frac{\partial \mathcal{M}}{\partial x_2} = R'(x_4)\, \frac{\partial \mathcal{M}}{\partial x_3} = 0, \tag{4}
$$

которые при условии $R' \neq 0$ дают равенство $\mathcal{M} = \mathcal{M}(x_4)$, которое означает, что временной параметр может быть произвольным. Фридман делает простейший выбор, полагая $\mathcal{M} = 1$. По мнению Гамова [4], именно здесь Эйнштейн допустил арифметическую ошибку – осуществил деление на ноль, получив из последних уравнений равенство $R' = 0$.

Заметим, что два уравнения Фридмана можно понимать как уравнения ньютоновской механики для материальной точки произвольной массы m в центральном поле двух сил, одна из которых дана законом всемирного тяготения Ньютона, а вторая есть пропорциональная массе сила упругости, имеющая обратное направление (закон “анти-Гука”):

$$\begin{aligned} ma &= -\frac{GmM}{R^2} + m\omega^2 R, \\ \frac{mv^2}{2} &= E - U(R), \end{aligned} \tag{5}$$

где использованы обозначения $v = R'$, $a = R''$, $\omega = \sqrt{\lambda/3}$,

$$U(R) = -\frac{GmM}{R} - \frac{m\omega^2 R^2}{2}, \qquad M = \frac{4}{3}\pi R^3 \rho, \qquad E = -\frac{mc^2}{2}.$$

При такой трактовке очевидно, что равновесие сил отталкивания и притяжения, а следовательно и стационарная Вселенная, неустойчивы.

Если перейти к гамильтонову формализму, то второе из уравнений Фридмана (1) является гамильтоновой связью, а гамильтониан равен произведению лагранжева множителя $\mathcal{M}$ на эту связь:

$$\mathrm{H} = \frac{2\mathcal{M}R^3}{\kappa}\left(-3\mathcal{H}^2 + \frac{\kappa\rho}{2} + \lambda\right). \tag{6}$$

Вместо импульса, канонически сопряженного масштабному фактору R, удобно использовать переменную $\mathcal{H}$ и неканоническую скобку Пуассона

$$\{R, \mathcal{H}\} = -\frac{\kappa}{12R^2}. \tag{7}$$

Если заменить пыль в качестве источника гравитационного поля на идеальную жидкость, то получаем закон сохранения энергии как следствие уравнений материи

$$\dot{\rho} + 3\mathcal{M}\mathcal{H}(\rho + p) = 0.$$

Тогда динамическое гамильтоново уравнение гравитации принимает вид

$$\mathcal{H}' = \{\mathcal{H}, \mathrm{H}\} = -\frac{\mathcal{M}\kappa}{4}(\rho + p), \tag{8}$$

а кинематическое уравнение записывается как

$$R' = \{R, \mathrm{H}\} = \mathcal{M}\mathcal{H}R. \tag{9}$$

Фридман был первым, кто использовал геометродинамический подход к уравнениям ОТО вне рамок теории возмущений, хотя это и было сделано только для частного вида метрики. Ранее динамика метрики рассматривалась только в приближении слабого поля [5]. Построенный Дираком [6], а также Арновитом, Дезером и Мизнером [7] (АДМ) гамильтонов формализм ОТО прояснил то, что можно было увидеть уже из анализа Фридмана, а мини-суперпространственный подход [8], [9] практически совпал с фридмановским.

3. МАССИВНАЯ ГРАВИТАЦИЯ И БИГРАВИТАЦИЯ

Введенная Эйнштейном космологическая постоянная не смогла обеспечить стационарность Вселенной и долгое время казалась излишней. Однако в конце 1990-х годов астрономы обнаружили, что Вселенная расширяется с ускорением. Теперь для описания наблюдаемого мира оказалось необходимым использовать космологическую константу, или темную энергию. Загадочной при этом оказывается сама величина λ, слишком малая, если ее рассматривать как энергию вакуума. Одной из возможностей объяснить эту малость является построение теории массивного гравитационного поля.

Логунов был одним из первых, кто серьезно отнесся к этой задаче. В течение длительного времени им и его соавторами разрабатывалась и изучалась релятивистская теория гравитации (РТГ) с массивным гравитоном [10]. Как известно, для того чтобы сделать гравитационное поле массивным, не нарушая общей ковариантности лагранжиана и уравнений, следует добавить к лагранжиану ОТО потенциал, т. е. скалярную плотность, построенную из двух метрик. Если для второй метрики также ввести кинетический член, то такая теория называется бигравитацией. В случае, когда вторая метрика имеет нединамический характер, говорят о массивной гравитации. В РТГ потенциал определяется единственным образом из соображений калибровочной инвариантности и лагранжиан теории имеет следующий вид:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{\kappa}\sqrt{-g}g^{\mu\nu}\mathcal{R}_{\mu\nu} - \frac{m^2}{\kappa}\left[\sqrt{-g}\left(\frac{1}{2}g^{\mu\nu}f_{\mu\nu} - 1\right) - \sqrt{-f}\right], \tag{10}$$

где $\mathcal{R}_{\mu\nu}$ – тензор Риччи, построенный из эффективной метрики $g_{\mu\nu}$, $f_{\mu\nu}$ – нединамическая фоновая плоская метрика, $g = \det|g_{\mu\nu}|$, $f = \det|f_{\mu\nu}|$, m – масса гравитона. Если перейти в систему координат $f_{\mu\nu} = \mathrm{diag}(-1, 1, r^2, r^2\sin^2\theta)$ и принять, что метрика $g_{\mu\nu}$ имеет вид метрики Фридмана–Робертсона–Уокера

$$ds^2 = -\mathcal{M}^2\,dt^2 + R^2(t)\left(\frac{dr^2}{1-kr^2} + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta\,d\phi^2)\right), \tag{11}$$

то уравнения РТГ могут выполняться только при $k = 0$, что соответствует плоскому пространству, причем функция $R(t)$ должна удовлетворять уравнению

$$\mathcal{H}^2 = \frac{8\pi G\rho}{3} - \frac{m^2}{12R^6}(1 + 2R^6 - 3R^4). \tag{12}$$

В сущности, мы снова пришли ко второму уравнению Фридмана (1), но с переменным космологическим членом [11]

$$\lambda(R) = -\frac{m^2}{2}\left(\frac{1}{2R^6} + 1 - \frac{3}{2R^2}\right). \tag{13}$$

Можно убедиться, что этот космологический член удовлетворяет неравенству $\lambda \leqslant 0$ и доминирует в уравнении как при $R \to \infty$, так и при $R \to 0$. Поэтому РТГ предсказывает циклическую эволюцию Вселенной, исключающую сингулярность при $R \to 0$. Потенциал РТГ не объясняет явление темной энергии, которое в рамках этой теории следует объяснять посредством выбора подходящих полей – источников гравитации.

Другой подход к массивной гравитации и бигравитации основан на использовании потенциала де Рам–Габададзе–Толи (дРГТ) [12]. Этот потенциал обладает уникальным свойством: он нарушает теорему Бульвара–Дезера [13] о присутствии духов в любой теории массивной гравитации. Число гравитационных степеней свободы здесь на единицу меньше, чем в РТГ. В то же время сам потенциал дРГТ определен с точностью до выбора постоянных β_n:

$$U = \frac{2m^2}{\kappa}\sqrt{-g}\sum_{n=0}^{4}\beta_n e_n(\mathsf{X}) = \frac{2m^2}{\kappa}(\beta_0\sqrt{-g} + \cdots + \beta_4\sqrt{-f}),$$

где $e_n(\mathsf{X})$ – симметричные полиномы матрицы $\mathsf{X}^\mu_\nu = (\sqrt{g^{-1}f})^\mu_\nu$. В случае минимального взаимодействия материи с динамической метрикой $g_{\mu\nu}$ космологические решения фридмановского типа в массивной гравитации дРТГ отсутствуют. Возможен, однако, подход, основанный на другом взамодействии, которое допускает эти решения. Если выразить и фоновую и динамическую метрики через тетрады

$$f_{\mu\nu} = F^A_\mu F^B_\nu h_{AB}, \qquad g_{\mu\nu} = E^A_\mu E^B_\nu h_{AB}, \tag{14}$$

где $h_{AB} = \mathrm{diag}(-1,1,1,1)$ – метрика Минковского, то произвольная линейная комбинация тетрад порождает новую эффективную метрику

$$\mathcal{G}_{\mu\nu} = (\alpha F^A_\mu + \beta E^A_\mu)(\alpha F^B_\nu + \beta E^B_\nu)h_{AB} \equiv \alpha^2 f_{\mu\nu} + \beta^2 g_{\mu\nu} + g_{(\mu\alpha}\mathsf{X}^\alpha_{\nu)}, \tag{15}$$

и можно построить минимальное взаимодействие материи с метрикой $\mathcal{G}_{\mu\nu}$. Такая теория уже не является полностью свободной от духов, но духи отсутствуют при низких энергиях вплоть до порога обрезания [14].

Лагранжиан бигравитации строится как сумма двух копий лагранжиана гравитационного поля ОТО, потенциала и лагранжиана материи. Космологические решения фридмановского типа можно получить для нескольких взаимодействий метрики с материей: минимального взаимодействия материи с метрикой $g_{\mu\nu}$, минимального взаимодействия двух видов материи с двумя метриками $f_{\mu\nu}$ и $g_{\mu\nu}$ и минимального взаимодействия материи с эффективной метрикой $\mathcal{G}_{\mu\nu}$. Мы рассмотрим здесь только случай взаимодействия с эффективной метрикой и ограничимся обсуждением случая плоского пространства. Подстановка Фридмана дает равенства

$$f_{\mu\nu} = (-\mathcal{M}^2(t), R_f^2(t)\delta_{ij}), \qquad g_{\mu\nu} = (-\mathcal{M}^2(t)u^2(t), R_g^2(t)\delta_{ij}), \tag{16}$$

тогда

$$g^{-1}f = g^{\mu\alpha}f_{\alpha\nu} = \mathrm{diag}(u^{-2}, r^2\delta_{ij}), \tag{17}$$

где мы ввели обозначение $r = R_f/R_g$. Извлечем корень из диагональной матрицы,

$$\mathsf{X} = \sqrt{g^{-1}f} = \mathrm{diag}(+\sqrt{u^{-2}}, +\sqrt{r^2}\delta_{ij}) \equiv \mathrm{diag}(u^{-1}, r\delta_{ij}), \tag{18}$$

тогда потенциал дРГТ принимает вид линейной функции переменной u:

$$U = \frac{2m^2}{\kappa}\sqrt{-g}\sum_{n=0}^{4}\beta_n e_n = \frac{2m^2}{\kappa}\mathcal{M}uR_g^3\sum_{n=0}^{4}\beta_n e_n = N(uV + W), \tag{19}$$

где

$$V=\frac{2m^2}{\kappa}R_g^3B_0(r),\quad W=\frac{2m^2}{\kappa}R_g^3B_1(r),\quad B_i(r)=\beta_i+3\beta_{i+1}r+3\beta_{i+2}r^2+\beta_{i+3}r^3. \quad (20)$$

Кинетическая часть гамильтониана бигравитации с точностью до полной производной по времени имеет вид

$$\mathrm{H}_{\mathrm{kinetic}}=\mathcal{M}\left(-\frac{6R_f^3}{\kappa_f}\mathcal{H}_f^2-u\frac{6R_g^3}{\kappa_g}\mathcal{H}_g^2\right), \quad (21)$$

где $\mathcal{H}_f=R_f'/(\mathcal{M}R_f)$, $\mathcal{H}_g=R_g'/(\mathcal{M}uR_g)$. Используем аналогичные (7) переменные $(R_f,\mathcal{H}_f)$, $(R_g,\mathcal{H}_g)$, тогда кинетическая часть гамильтониана генерирует кинематические уравнения Гамильтона, эквивалентные определению двух параметров Хаббла $\mathcal{H}_f$, $\mathcal{H}_g$. Нетрудно получить аналогичное уравнение эволюции для переменной r:

$$r'=\mathcal{M}r(\mathcal{H}_f-u\mathcal{H}_g). \quad (22)$$

В качестве примера материи будем использовать скалярное поле и его феноменологическое описание на языке идеальной жидкости:

$$\mathcal{L}^{(\mathrm{matter})}=\mathcal{L}_\phi=\sqrt{-\mathcal{G}}\left(-\frac{1}{2}\mathcal{G}^{\mu\nu}\phi_{,\mu}\phi_{,\nu}-\mathcal{U}(\phi)\right), \quad (23)$$

предполагая, что при космологическом рассмотрении оно зависит только от времени: $\phi=\phi(t)$. Из формул (15), (16) получаем, что

$$\mathcal{G}_{00}=-\mathcal{N}^2,\quad \mathcal{N}=\mathcal{M}(\alpha u+\beta),\quad \mathcal{G}_{0i}=0,\quad \mathcal{G}_{ij}=R^2\delta_{ij}\equiv\psi_{ij},\quad R=\alpha R_g+\beta R_f. \quad (24)$$

Тогда

$$\pi_\phi=\frac{\partial\mathcal{L}_\phi}{\partial\phi'}=\frac{R^3}{\mathcal{N}}\phi',\qquad \phi'=\frac{\mathcal{N}}{R^3}\pi_\phi. \quad (25)$$

Плотность ρ и давление p соответствующей идеальной жидкости определяются формулами

$$\rho=\frac{\pi_\phi^2}{2R^6}+\mathcal{U}(\phi),\qquad p=\frac{\pi_\phi^2}{2R^6}-\mathcal{U}(\phi), \quad (26)$$

так что плотность гамильтониана пропорциональна плотности этой жидкости, а плотность лагранжана – давлению. Полный гамильтониан имеет вид

$$\mathrm{H}=\mathcal{M}(\mathcal{R}+u\mathcal{S}). \quad (27)$$

Варьируя по лагранжевым множителям u, $\mathcal{M}$, получаем первичные связи, равносильные двум уравнениям Фридмана:

$$\mathcal{S}=R_g^3\left[-\frac{6}{\kappa_g}{\mathcal{H}_g}^2+\alpha(\alpha+\beta r)^3\rho+\frac{2m^2}{\kappa}B_0(r)\right]=0, \quad (28)$$

$$\mathcal{R}=R_f^3\left[-\frac{6}{\kappa_f}{\mathcal{H}_f}^2+\frac{\beta}{r^3}(\alpha+\beta r)^3\rho+\frac{2m^2}{\kappa}\frac{B_1(r)}{r^3}\right]=0. \quad (29)$$

Из требования сохранения связи $\mathcal{S}=0$ в ходе эволюции находим вторичную связь

$$\dot{\mathcal{S}}=\{\mathcal{S},\mathrm{H}\}=\mathcal{M}\Omega=0,\qquad \Omega=\{\mathcal{S},\mathcal{R}\}=\frac{6m^2R_g^3}{\kappa}\Omega_1\Omega_2=0. \tag{30}$$

Поскольку вторичная связь оказывается факторизованной, нужно рассмотреть две ветви решений:

$$\Omega_1\equiv r\mathcal{H}_f-\mathcal{H}_g=0,\qquad \Omega_2\equiv D_1(r)-\frac{\kappa}{2m^2}\alpha\beta(\alpha+\beta r)^2p=0, \tag{31}$$

где введено обозначение

$$D_i(r)=\beta_i+2\beta_{i+1}r+\beta_{i+2}r^2. \tag{32}$$

Лагранжев множитель u определяется для каждой из ветвей ($i=1,2$) из условия сохранения соответствующей вторичной связи:

$$\Omega_i'=\{\Omega_i,\mathrm{H}\}\equiv\mathcal{M}(\{\Omega_i,\mathcal{R}\}+u_i\{\Omega_i,\mathcal{S}\})=0,\qquad u_i=-\frac{\{\Omega_i,\mathcal{R}\}}{\{\Omega_i,\mathcal{S}\}}. \tag{33}$$

Второй лагранжев множитель $\mathcal{M}$ остается произвольным, связь $\mathcal{R}=0$ является связью первого рода. Для первой ветви решений уравнений связи полезно выразить $\mathcal{H}_f$ и $\mathcal{H}_g$ через $\mathcal{H}$:

$$\mathcal{H}_f=\mathcal{H}\left(\frac{\alpha}{r}+\beta\right),\qquad \mathcal{H}_g=\mathcal{H}(\alpha+\beta r),\qquad \mathcal{H}=\frac{R'}{\mathcal{N}R}, \tag{34}$$

и можно переписать уравнения (28), (29) в виде

$$\mathcal{H}^2=\frac{\kappa_g}{6}\alpha(\alpha+\beta r)\rho+\frac{m^2}{3}\frac{\kappa_g}{\kappa}\frac{B_0}{(\alpha+\beta r)^2},\quad \mathcal{H}^2=\frac{\kappa_f}{6r}\beta(\alpha+\beta r)\rho+\frac{m^2}{3r}\frac{\kappa_f}{\kappa}\frac{B_1}{(\alpha+\beta r)^2}. \tag{35}$$

После этого оказывается возможным выразить наблюдаемые величины в виде функций от ненаблюдаемой переменной r:

$$\rho=\mu^{-1}\frac{2m^2}{\kappa}\frac{\mu B_1(r)-rB_0(r)}{(\alpha+\beta r)^3(\mu^{-1}r\alpha-\beta)},\qquad \mathcal{H}^2=\frac{m^2}{3}\frac{\alpha B_1(r)-\beta B_0(r)}{(\alpha+\beta r)^2(\mu^{-1}r\alpha-\beta)}\frac{\kappa_g}{\kappa}, \tag{36}$$

$$\Lambda=m^2\frac{\kappa_g}{\kappa}\frac{B_0}{(\alpha+\beta r)^2}, \tag{37}$$

где $\mu=\kappa_f/\kappa_g$. Переход к случаю массивной гравитации для первой ветви означает, что метрика $f_{\mu\nu}$ должна быть фиксирована. Простейший вариант означает, что R_f и $\mathcal{M}$ постоянны. Тогда $\mathcal{H}_f=0$, и связь $\Omega_1=0$ дает равенство $\mathcal{H}_g=0$, т. е. R_g также должно быть постоянным, и фридмановское поведение для первой ветви невозможно.

Вторая ветвь решений $\Omega_2=0$ означает выполнение равенства

$$p=\frac{2m^2}{\kappa}\frac{D_1(r)}{\alpha\beta(\alpha+\beta r)^2}. \tag{38}$$

С учетом этого уравнения и уравнений первичных связей (28), (29) динамические гамильтоновы уравнения принимают вид

$$\dot{\mathcal{H}}_g = -\frac{Nu\kappa_g}{4}\alpha(\alpha+\beta r)^3(\rho+p), \qquad \dot{\mathcal{H}}_f = -\frac{N\kappa_f}{4r^3}\beta(\alpha+\beta r)^3(\rho+p). \tag{39}$$

Отсюда следует соотношение

$$\frac{d\mathcal{H}_g}{d\mathcal{H}_f} = \mu^{-1}\frac{\alpha}{\beta}ur^3. \tag{40}$$

В лагранжевом формализме анализ решений для второй ветви решений бигравитации был проведен в работе [15]. Для второй ветви решений уравнений связи не только бигравитация, но и массивная теория гравитации позволяет получить динамическую эволюцию масштабного фактора при плоской фоновой метрике [16].

4. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Найденные Фридманом в 1922 г. уравнения остаются и по сей день главным инструментом изучения космологии. Наличие проблем с объяснением темной энергии и темной материи во Вселенной стимулирует изобретение новых теорий гравитации. В этих теориях уравнения Фридмана модифицируются, но сохраняют свои существенные черты. В работе были расмотрены как теории массивной гравитации, так и бигравитация, взаимодействующая с материей через эффективную метрику. Предметом обсуждения является применимость этих теорий к описанию данных современных наблюдений.

Благодарности. Автор благодарен организаторам семинара за приглашение выступить с настоящим докладом.

Список литературы

[1] А. Фридман, “Письма и рукописи”, В архиве П. Эренфеста, http://www.lorentz.leidenuniv.nl/history/Friedmann_archive/ 1922.

[2] A. Friedmann, “Über die Krümmung des Raumes”, *Z. Phys.*, **10**:1 (1922), 377–386; А. А. Фридман, “О кривизне пространства”, *Журн. русск. физ.-хим. о-ва, часть физ.*, **56**:1 (1924), 59–68; *УФН*, **80**:3 (1963), 439–446; **93**:2 (1967), 280–287.

[3] Ю. Ципенюк, “Каким я запомнил П. Л. Капицу”, *Квант*, **5–6** (2014), 23–25.

[4] G. Gamov, *The Creation of the Universe*, Viking Press, New York, 1952.

[5] А. Эйнштейн, “Приближенное интегрирование уравнений гравитационного поля”, *Собрание научных трудов*, т. 1, Наука, М., 1965, 514–523.

[6] П. А. М. Дирак, “Фиксация координат в гамильтоновой теории гравитации”, *Собрание научных трудов*, т. 4: *Гравитация и космология. Воспоминания и размышления (лекции, научные статьи* 1937–1984 *гг.)*, Физматлит, М., 2005, 255–269.

[7] Р. Арновитт, С. Дизер, К. В. Миснер, “Динамика общей теории относительности”, *Эйнштейновский сборник* 1967, ред. И. Е. Тамм, Г. И. Наан, Наука, М., 1967, 233–287.

[8] B. S. DeWitt, “The quantum theory of gravity. I. The Canonical Theory”, *Phys. Rev.*, **160**:5 (1967), 1113–1148.

[9] M. Ryan, *Hamiltonian Cosmology*, Springer, Berlin, 1972.

[10] А. А. Логунов, *Релятивистская теория гравитации*, Наука, М., 2012.

[11] С. С. Герштейн, А. А. Логунов, М. А. Мествиришвили, “О верхнем пределе на массу гравитона”, *Докл. РАН*, **360**:3 (1998), 332–334, arXiv: hep-th/9711147.

[12] C. de Rham, G. Gabadadze, A. J. Tolley, "Resummation of massive gravity", *Phys. Rev. Lett.*, **106**:23 (2011), 231101, 4 pp., arXiv: 1011.1232.

[13] D. Boulware, S. Deser, "Can gravitation have a finite range?", *Phys. Rev. D*, **6**:12 (1972), 3368–3382.

[14] C. de Rham, L. Heisenberg, R. H. Ribeiro, "On couplings to matter in massive (bi-)gravity", *Class. Quantum Grav.*, **32**:3 (2015), 035022, 29 pp., arXiv: 1408.1678.

[15] M. Lagos, J. Noller, "New massive bigravity cosmologies with double matter coupling", *JCAP*, **01** (2016), 023, 30 pp., arXiv: 1508.05864.

[16] A. R. Solomon, J. Enander, Y. Akrami, T. S. Koivisto, F. König, E. Mörtsell, "Cosmological viability of massive gravity with generalized matter coupling", *JCAP*, **04** (2015), 027, 19 pp., arXiv: 1409.8300.