ФИЗИКА ЭЛЕМЕНТАРНЫХ ЧАСТИЦ И АТОМНОГО ЯДРА
2017. Т. 48. ВЫП. 2. С. 236–281

ГАМИЛЬТОНОВА КОСМОЛОГИЯ БИГРАВИТАЦИИ

В. О. Соловьев[*]

Институт физики высоких энергий, Национальный исследовательский центр «Курчатовский институт», Протвино, Россия

Дается обзор применения гамильтонова формализма в бигравитации и массивной гравитации с потенциалом де Рама–Габададзе–Толи (дРГТ) для вывода фоновых космологических уравнений. Показано, что космологические сценарии в бигравитации оказываются близкими к стандартной модели ΛCDM, однако обнаруживается динамический характер космологического члена. Космологический член возникает независимо от выбора параметров потенциала дРГТ, а его масштаб определяется массой гравитона. Рассмотрены различные взаимодействия гравитации с материей.

This article is written as a review of the Hamiltonian formalism for the bigravity with de Rham–Gabadadze–Tolley (dRGT) potential, and of applications of this formalism to the derivation of the background cosmological equations. It is demonstrated that the cosmological scenaria are close to the standard ΛCDM model, but they also uncover the dynamical behaviour of the cosmological term. This term arises in bigravity regardless of the choice of the dRGT potential parameters, and its scale is given by the graviton mass. Various matter coupling are considered.

PACS: 04.20.Fy; 04.50.Kd; 98.80.Jk

ВВЕДЕНИЕ

Одной из актуальных проблем современной физики является проблема объяснения темной энергии. Существуют различные подходы к этой задаче, и один из них — ревизия стандартной теории гравитации, т. е. общей теории относительности (ОТО). Это может быть сделано путем придания массы гравитону. В этом случае появляются новые предсказания для физики на больших расстояниях. Обычным путем построения массивной гравитации является введение нового тензорного поля со свойствами, подобными свойствам метрического тензора. С эстетической точки зрения естественно ожидать, что новое поле также будет динамическим. В этом случае модель называется бигравитацией или биметрической гравитацией. В линейном относительно

[*]E-mail: Vladimir.Soloviev@ihep.ru

плоского фона приближении бигравитация описывает одно безмассовое поле спина 2 и одно массивное поле с тем же спином.

Ключевой проблемой при построении бигравитации или массивной гравитации является необходимость избежать появления духа Бульвара–Дезера [1]. Эта задача была решена де Рамом, Габададзе и Толи [2, 3] (дРГТ), предложившими специальный вид потенциала, включающий в себя квадратный корень из матрицы. Доказательство того, что такая теория свободна от духов, первоначально появилось в метрическом гамильтоновом формализме [4, 5]. Непосредственные расчеты для потенциала дРГТ в метрическом формализме весьма затруднительны, однако они становятся много проще в тетрадных переменных. К счастью, при обсуждении фоновой космологии оба метрических тензора диагональны и имеют крайне простой вид. Мы приходим к так называемому мини-суперпространственному формализму, и здесь извлечение квадратного корня из матрицы не представляет собой никаких затруднений и может быть выполнено явным образом.

Обратим внимание, что дух Бульвара–Дезера в двух случаях появляется даже в мини-суперпространстве: во-первых, при выборе потенциала, отличного от дРГТ (см. разд. 5), во-вторых, при минимальном взаимодействии материи сразу с двумя метриками (см. п. 4.2).

Настоящая работа является первым обзором, посвященным гамильтонову подходу к космологии бигравитации. В то же время она может служить введением в более общее направление — в гамильтоново описание теорий бигравитации и массивной гравитации с потенциалом дРГТ.

К настоящему времени по теме космологии бигравитации уже написано немало работ. Мы цитируем только часть из них и не претендуем на то, чтобы представить их полный список. Как правило, в этих работах в качестве аппарата применяются лагранжев формализм и тождества Бианки. Отличительная особенность настоящей статьи в том, что она написана как введение в космологию бигравитации, охватывает разные постановки задачи и при этом объединяет их с единой точки зрения гамильтонова метода, ковариантное применение которого к биметрической теории впервые рассматривалось в работе [6]. Нам кажется уместным также сослаться на известную книгу по гамильтонову подходу к космологии [7].

Разнообразие постановок задачи порождено возможностью выбирать способы взаимодействия материи с двумя метрическими тензорами. В статье рассмотрены минимальные взаимодействия двух видов материи с двумя метриками, минимальное взаимодействие материи только с одной из двух метрик, взаимодействие материи с двумя метриками сразу и взаимодействие эффективной метрики с материей. Также мы проиллюстрируем общую схему примером потенциала, не относящегося к типу дРГТ. Из соображений простоты изложения ограничимся случаем плоского пространства и наличием только одного поля материи.

В статье не рассматривается локальная физика и соответствующие вопросы устойчивости фоновых решений. Эта тема обсуждается, например, в публикациях [8, 9]. В работе [10] утверждается, что проблема растущих возмущений может быть решена выбором очень малой массы Планка для второй метрики $f_{\mu\nu}$.

В разд. 1 и 2 кратко излагается построение гамильтониана бигравитации (сначала в метрических переменных, затем в тетрадных). Более детальное изложение читатель может найти в публикациях [11–16]. С иными подходами к гамильтонову формализму, которые здесь не обсуждаются, можно познакомиться в работах [4, 5, 17, 18]. Гамильтонианы в мини-суперпространстве конструируются в разд. 3, затем развитый там подход применяется для конкретных выводов космологических уравнений в разд. 4 и 5. Приложение 1 содержит явные формулы для потенциала дРГТ в тетрадных переменных. В приложении 2 сжато излагаются отношения теории бигравитации с современными наблюдениями. Разумеется, в современной литературе рассматривается несравнимо более широкий круг моделей космологии, и автор никоим образом не пытается доказать, что представленные ниже являются наилучшими.

1. МЕТРИЧЕСКИЕ ПЕРЕМЕННЫЕ

Плотность лагранжиана бигравитации имеет вид

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_g + \mathcal{L}_f + \mathcal{L}_M - \frac{2m^2}{\kappa} U(f_{\mu\nu}, g_{\mu\nu}),$$

где использованы две копии лагранжиана ОТО

$$\mathcal{L}_g = \frac{1}{\kappa_g} \sqrt{-g} g^{\mu\nu} R^{(g)}_{\mu\nu}, \qquad \mathcal{L}_f = \frac{1}{\kappa_f} \sqrt{-f} f^{\mu\nu} R^{(f)}_{\mu\nu}.$$

В $\mathcal{L}$ также входят потенциал взаимодействия двух метрик и лагранжиан материи. Для простоты в роли материи будем рассматривать скалярное поле, минимально взаимодействующее с некоторой метрикой $\mathcal{G}_{\mu\nu}$,

$$\mathcal{L}_\phi = \sqrt{-\mathcal{G}} \left(-\frac{1}{2} \mathcal{G}^{\mu\nu} \phi_{,\mu} \phi_{,\nu} - \mathcal{U}(\phi) \right). \tag{1.1}$$

В дальнейшем этой метрикой может быть $g_{\mu\nu}$, или $f_{\mu\nu}$, или их комбинация, называемая эффективной метрикой (см. п. 4.3). Постоянная κ перед потенциалом может быть выбрана совпадающей со стандартной постоянной Ньютона $\kappa_g = 16\pi G$, но в некоторых статьях она выбирается иначе, например,

$$\frac{1}{\kappa} = \frac{1}{\kappa_g} + \frac{1}{\kappa_f}, \tag{1.2}$$

поэтому мы сначала примем общее обозначение. Обозначим компоненты $3+1$-разложения общей метрики $\mathcal{G}_{\mu\nu}$ и ее обратной в координатном базисе АДМ следующим образом:

$$||\mathcal{G}_{\mu\nu}|| = \begin{pmatrix} -\mathcal{N}^2 + \psi_{mn}\mathcal{N}^m\mathcal{N}^n & \psi_{jk}\mathcal{N}^k \\ \psi_{ik}\mathcal{N}^k & \psi_{ij} \end{pmatrix}, \tag{1.3}$$

$$||\mathcal{G}^{\mu\nu}|| = \begin{pmatrix} -\mathcal{N}^{-2} & \mathcal{N}^j\mathcal{N}^{-2} \\ \mathcal{N}^i\mathcal{N}^{-2} & \psi^{ij} - \mathcal{N}^i\mathcal{N}^j\mathcal{N}^{-2} \end{pmatrix}, \tag{1.4}$$

где $\mathcal{N}$ — функция смещения; $\mathcal{N}^i$ — вектор сдвига; ψ_{ij} — индуцированная метрика на пространственной гиперповерхности фиксированного времени, а ψ^{ij} — обратная к ней матрица. Потенциал взаимодействия двух метрик, предложенный де Рамом, Габададзе и Толи [2, 3], строится как линейная комбинация симметричных полиномов e_i матрицы $\mathsf{X}^{\mu}_{\nu} = \left(\sqrt{g^{-1}f}\right)^{\mu}_{\nu}$

$$\begin{aligned} &e_0 = 1, \\ &e_1 = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4, \\ &e_2 = \lambda_1\lambda_2 + \lambda_2\lambda_3 + \lambda_3\lambda_4 + \lambda_4\lambda_1 + \lambda_1\lambda_3 + \lambda_2\lambda_4, \\ &e_3 = \lambda_1\lambda_2\lambda_3 + \lambda_2\lambda_3\lambda_4 + \lambda_1\lambda_3\lambda_4 + \lambda_1\lambda_2\lambda_4, \\ &e_4 = \lambda_1\lambda_2\lambda_3\lambda_4, \end{aligned} \tag{1.5}$$

где λ_i — собственные значения матрицы X. Тогда

$$U = \sqrt{-g}\sum_{n=0}^{4}\beta_n e_n(\mathsf{X}) = \beta_0\sqrt{-g} + \ldots + \beta_4\sqrt{-f} \equiv N\tilde{U}.$$

Наш план построения гамильтонова формализма состоит в следующем. Сначала заимствуем канонические переменные и выражения гамильтонианов из двух копий ОТО

$$H_g = \int d^3x(\bar{N}\bar{\mathcal{H}} + \bar{N}^i\bar{\mathcal{H}}_i), \tag{1.6}$$

$$H_f = \int d^3x(N\mathcal{H} + N^i\mathcal{H}_i), \tag{1.7}$$

где

$$\bar{\mathcal{H}} = -\frac{1}{\sqrt{\gamma}}\left(\frac{1}{\kappa_g}\gamma R^{(3)} + \kappa_g\left(\frac{\pi^2}{2} - \operatorname{Tr}\pi^2\right)\right), \tag{1.8}$$

$$\bar{\mathcal{H}}_i = -2\pi^j_{i|j}, \tag{1.9}$$

$$\mathcal{H} = -\frac{1}{\sqrt{\eta}}\left(\frac{1}{\kappa_f}\eta R^{(\eta)} + \kappa_f\left(\frac{\Pi^2}{2} - \operatorname{Tr}\Pi^2\right)\right), \tag{1.10}$$

$$\mathcal{H}_i = -2\Pi^j_{i|j}. \tag{1.11}$$

Между каноническими переменными имеют место стандартные скобки Пуассона

$$\{\gamma_{ij}(x), \pi^{k\ell}(y)\} = \frac{1}{2}\left(\delta_i^k\delta_j^\ell + \delta_i^\ell\delta_j^k\right)\delta(x,y), \tag{1.12}$$

$$\{\eta_{ij}(x), \Pi^{k\ell}(y)\} = \frac{1}{2}\left(\delta_i^k\delta_j^\ell + \delta_i^\ell\delta_j^k\right)\delta(x,y). \tag{1.13}$$

АДМ-разложения двух метрик пространства-времени имеют следующий вид:

$$||f_{\mu\nu}|| = \begin{pmatrix} -N^2 + \eta_{mn}N^mN^n & \eta_{jk}N^k \\ \eta_{ik}N^k & \eta_{ij} \end{pmatrix}, \tag{1.14}$$

$$||f^{\mu\nu}|| = \begin{pmatrix} -N^{-2} & N^jN^{-2} \\ N^iN^{-2} & \eta^{ij} - N^iN^jN^{-2} \end{pmatrix}, \tag{1.15}$$

$$||g_{\mu\nu}|| = \begin{pmatrix} -\bar{N}^2 + \gamma_{mn}\bar{N}^m\bar{N}^n & \gamma_{jk}N^k \\ \gamma_{ik}\bar{N}^k & \gamma_{ij} \end{pmatrix}, \tag{1.16}$$

$$||g^{\mu\nu}|| = \begin{pmatrix} -\bar{N}^{-2} & \bar{N}^j\bar{N}^{-2} \\ \bar{N}^i\bar{N}^{-2} & \gamma^{ij} - \bar{N}^i\bar{N}^j\bar{N}^{-2} \end{pmatrix}. \tag{1.17}$$

Затем мы построим гамильтониан материи

$$H_M = \int d^3x(\mathcal{N}\mathcal{H}_M + \mathcal{N}^i\mathcal{H}_{Mi}).$$

В случае, когда роль материи играет скалярное поле, минимально взаимодействующее с одной из метрик $\mathcal{G}_{\mu\nu}$, согласно уравнениям (1.3), (1.4) получаем

$$\mathcal{H}_M = \frac{\pi_\phi^2}{2\sqrt{\psi}} + \frac{\sqrt{\psi}}{2}\psi^{ij}\partial_i\phi\partial_j\phi + \sqrt{\psi}\,\mathcal{U}(\phi).$$

При работе с двумя и более метриками вместо координатного базиса удобно пользоваться геометрическим базисом [19–22], образованным единичной нормалью к гиперповерхности состояния n^α и тремя касательными к этой гиперповерхности векторами e_i^α. Пусть X^μ — произвольная система координат в пространстве-времени, а (t, x^i) — система координат АДМ, т. е. функции $X^\mu = X^\mu(t)$ обеспечивают однопараметрическое заполнение пространства-времени пространственноподобными гиперповерхностями, тогда как x^i — внутренние координаты на гиперповерхности.

Тогда $e_i^\mu = \partial X^\mu/\partial x^i$ есть три касательных вектора. Разумеется, для построения единичной нормали требуется метрика пространства-времени; используем для этого метрику $f_{\mu\nu}$, тогда

$$f_{\mu\nu}n^\mu n^\nu = -1, \qquad f_{\mu\nu}n^\mu e_i^\nu = 0.$$

Если по этому базису разложить другую метрику, например, $g_{\mu\nu}$, мы получим

$$||g^{\mu\nu}|| = \begin{pmatrix} -u^{-2}[n^\mu n^\nu] & u^j u^{-2}[n^\mu e^\nu_j] \\ u^i u^{-2}[e^\mu_i n^\nu] & (\gamma^{ij} - u^i u^j u^{-2})[e^\mu_i e^\nu_j] \end{pmatrix}, \tag{1.18}$$

$$||g_{\mu\nu}|| = \begin{pmatrix} (-u^2 + \gamma_{mn} u^m u^n)[n_\mu n_\nu] & -\gamma_{jk} u^k [n_\mu e^j_\nu] \\ -\gamma_{ik} u^k [e^i_\mu n_\nu] & \gamma_{ij}[e^i_\mu e^j_\nu] \end{pmatrix}, \tag{1.19}$$

где появляются новые переменные u, u^i. Они играют как минимум три роли: во-первых, они появляются в формулах, связывающих две пары функций смещения и сдвига:

$$u = \frac{\bar{N}}{N}, \qquad u^i = \frac{\bar{N}^i - N^i}{N}, \tag{1.20}$$

во-вторых, они получаются при проектировании тензора $g^{\mu\nu}$ на базис (n_α, e^i_α), построенный на основе метрики $f_{\mu\nu}$:

$$u = \frac{1}{\sqrt{-g^{\perp\perp}}} \equiv \frac{1}{\sqrt{-g^{\mu\nu} n_\mu n_\nu}}, \qquad u^i = -\frac{g^{\perp i}}{g^{\perp\perp}} \equiv \frac{g^{\mu\nu} n_\mu e^i_\nu}{g^{\alpha\beta} n_\alpha n_\beta}, \tag{1.21}$$

в-третьих, они являются коэффициентами перехода между двумя базисами $(\bar{n}_\alpha, \bar{e}^i_\alpha)$ и (n_α, e^i_α):

$$\bar{n}_\mu = u n_\mu, \quad \bar{e}^i_\mu = e^i_\mu - u^i n_\mu, \quad \bar{n}^\mu = \frac{1}{u} n^\mu - \frac{u^i}{u} e^\mu_i, \quad \bar{e}^\mu_i = e^\mu_i. \tag{1.22}$$

Поскольку базис ковекторов (n_α, e^i_α) и базис векторов (n^α, e^α_i) построены с помощью метрики $f_{\mu\nu}$, эта метрика имеет только шесть независимых компонент при разложении по ним:

$$||f^{\mu\nu}|| = \begin{pmatrix} -[n^\mu n^\nu] & 0 \\ 0 & \eta^{ij}[e^\mu_i e^\nu_j] \end{pmatrix}, \tag{1.23}$$

$$||f_{\mu\nu}|| = \begin{pmatrix} -[n_\mu n_\nu] & 0 \\ 0 & \eta_{ij}[e^i_\mu e^j_\nu] \end{pmatrix}. \tag{1.24}$$

Очевидно, что все компоненты матрицы $\mathsf{Y}^\mu_\nu = g^{\mu\alpha} f_{\alpha\nu}$ выражаются через переменные u, u^i, γ_{ij} и η_{ij}. Это же утверждение справедливо для инвариантов этой матрицы, например, $\mathrm{Tr}\,(\mathsf{Y}^n)$. Поэтому собственные значения $\mathsf{X} = \sqrt{\mathsf{Y}}$ также зависят только от этих переменных. В общем случае невозможно получить явное выражение для потенциала дРГТ в виде

$$U = N\tilde{U}(u, u^i, \eta_{ij}, \gamma_{ij}).$$

По этой причине мы начинаем с функции общего вида $\tilde{U}$ и ее формальных производных

$$V = \frac{\partial \tilde{U}}{\partial u}, \tag{1.25}$$

$$V_i = \frac{\partial \tilde{U}}{\partial u^i}, \tag{1.26}$$

также будем использовать функцию

$$W = \tilde{U} - u\frac{\partial \tilde{U}}{\partial u} - u^i\frac{\partial \tilde{U}}{\partial u^i}.$$

Гамильтониан теперь принимает вид

$$\mathrm{H} = \int d^3x \left[N\left(\mathcal{H} + u\bar{\mathcal{H}} + u^i\bar{\mathcal{H}}_i + \mathcal{H}_M + \frac{2m^2}{\kappa}\tilde{U} \right) + N^i\left(\mathcal{H}_i + \bar{\mathcal{H}}_i + \mathcal{H}_{Mi} \right) \right].$$

Тогда производные от полного гамильтониана по нединамическим переменным N, N^i, u, u^i дают нам первичные уравнения

$$\mathcal{R} = \frac{\partial H}{\partial N} \equiv \mathcal{H} + u\bar{\mathcal{H}} + u^i\bar{\mathcal{H}}_i + \mathcal{H}_M + \frac{2m^2}{\kappa}\tilde{U} = 0, \tag{1.27}$$

$$\mathcal{R}_i = \frac{\partial H}{\partial N^i} \equiv \mathcal{H}_i + \bar{\mathcal{H}}_i + \mathcal{H}_{Mi}, \tag{1.28}$$

$$\mathcal{S} = \frac{1}{N}\frac{\partial H}{\partial u} \equiv \bar{\mathcal{H}} + \frac{\partial \mathcal{H}_M}{\partial u} + \frac{2m^2}{\kappa}V = 0, \tag{1.29}$$

$$\mathcal{S}_i = \frac{1}{N}\frac{\partial H}{\partial u^i} \equiv \bar{\mathcal{H}}_i + \frac{\partial \mathcal{H}_M}{\partial u^i} + \frac{2m^2}{\kappa}V_i = 0. \tag{1.30}$$

Затем перепишем гамильтониан в следующем виде:

$$\mathrm{H} = \int d^3x[N\left(\mathcal{R}' + u\mathcal{S} + u^i\mathcal{S}_i\right) + N^i\mathcal{R}_i], \tag{1.31}$$

где

$$\mathcal{R}' = \mathcal{H} + \frac{2m^2}{\kappa}W. \tag{1.32}$$

Для потенциала общего вида $\tilde{U}$ уравнения

$$\mathcal{S} = 0, \quad \mathcal{S}_i = 0 \tag{1.33}$$

могут быть разрешены относительно переменных u, u^i, затем эти решения надо подставить в выражение $\mathcal{R}'$, чтобы превратить его в связь, т. е. в функцию только от канонических переменных. После этого уравнения

$$\mathcal{R} = 0, \qquad \mathcal{R}_i = 0 \tag{1.34}$$

оказываются связями первого рода, возникающими вследствие инвариантности биградитации относительно диффеоморфизмов пространства-времени. На поверхности связей, т. е. при выполнении уравнений (1.33), их скобки Пуассона удовлетворяют известной алгебре

$$\{\mathcal{R}(x), \mathcal{R}(y)\} \approx \left(\eta^{ik}(x)\mathcal{R}_k(x) + \eta^{ik}(y)\mathcal{R}_k(y)\right)\delta_{,i}(x,y), \tag{1.35}$$
$$\{\mathcal{R}_i(x), \mathcal{R}_k(y)\} \approx \mathcal{R}_i(y)\delta_{,k}(x,y) + \mathcal{R}_k(x)\delta_{,i}(x,y), \tag{1.36}$$
$$\{\mathcal{R}_i(x), \mathcal{R}(y)\} \approx \mathcal{R}(x)\delta_{,i}(x,y), \tag{1.37}$$

которая была получена Дираком и обсуждалась им в связи с предложением о квантовании полей на искривленных гиперповерхностях [23]. Для потенциала общего вида $\tilde{U}$ мы здесь получаем уравнения, которым потенциал должен удовлетворять, чтобы имела место упомянутая выше алгебра скобок Пуассона:

$$2\eta_{ik}\frac{\partial\tilde{U}}{\partial\eta_{jk}} + 2\gamma_{ik}\frac{\partial\tilde{U}}{\partial\gamma_{jk}} - u^j\frac{\partial\tilde{U}}{\partial u^i} - \delta_i^j\tilde{U} = 0, \tag{1.38}$$
$$2u^j\gamma_{jk}\frac{\partial\tilde{U}}{\partial\gamma_{ik}} - u^i u\frac{\partial\tilde{U}}{\partial u} + \left(\eta^{ik} - u^2\gamma^{ik} - u^i u^k\right)\frac{\partial\tilde{U}}{\partial u^k} = 0. \tag{1.39}$$

Для того чтобы уравнение $\mathcal{S} = 0$ являлось уравнением связи, позволяющим исключить духовую степень свободы, необходимо наложить на потенциал еще одно условие. Этим условием является требование невозможности разрешить уравнения (1.33) относительно вспомогательных переменных $u^a = (u, u^i)$, т. е. эти уравнения должны быть функционально зависимы:

$$\frac{D(\mathcal{S},\mathcal{S}_i)}{D(u,u^i)} = \det\left|\left|\frac{\partial^2}{\partial u^a\partial u^b}\left(\frac{2m^2}{\kappa}\tilde{U} + \mathcal{H}_M\right)\right|\right| \equiv$$
$$\equiv \mathrm{Hess}_{(4\times4)}\left(\frac{2m^2}{\kappa}\tilde{U} + \mathcal{H}_M\right) = 0. \tag{1.40}$$

Далее нам необходимо доказать существование вторичной связи Ω и факт неравенства нулю ее скобки Пуассона с первичной связью $\mathcal{S}$. Здесь полезно применить метод, предложенный Лезновым и Файерли [24] для построения неявных решений однородного уравнения Монжа–Ампера. Этот прием был впервые использован в теории массивной гравитации [13]. Комбинируя уравнения (1.38), (1.39) с техникой работы [24], можно доказать, что

$$\{\mathcal{S}(x), \mathcal{S}(y)\} \approx 0,$$

и, следовательно,

$$\dot{\mathcal{S}} = \{\mathcal{S}, \mathrm{H}\} \approx \int d^3x N\{\mathcal{S}, \mathcal{R}'\} = \int d^3x N\Omega = 0 \leftrightarrow \Omega = 0.$$

Применяя тождество Якоби, можно также показать, что в общем случае

$$\{\Omega, \mathcal{S}\} \neq 0,$$

и, таким образом, эта пара связей оказывается второго рода в терминологии Дирака. Вспомогательная переменная u фиксируется условием сохранения вторичной связи при эволюции

$$\{\Omega, \mathrm{H}\} = \int d^3x N\left(\{\Omega, \mathcal{R}'\} + u\{\Omega, \mathcal{S}\}\right) = 0.$$

Другие вспомогательные переменные u^i должны определяться из уравнений $\mathcal{S}_i = 0$. Для этого необходимо потребовать, чтобы выполнялось условие

$$\det\left\|\frac{\partial \mathcal{S}_i}{\partial u^k}\right\| = \det\left\|\frac{\partial^2}{\partial u^i \partial u^k}\left(\frac{2m^2}{\kappa}\tilde{U} + \mathcal{H}_M\right)\right\| \equiv \\ \equiv \mathrm{Hess}_{(3\times3)}\left(\frac{2m^2}{\kappa}\tilde{U} + \mathcal{H}_M\right) \neq 0, \quad (1.41)$$

и, следовательно, ранг большого 4×4 гессиана (1.40) должен быть равен трем. В итоге приходим к гамильтонову формализму бигравитации с 12 парами канонических переменных (γ_{ij}, π^{ij}), (η_{ij}, Π^{ij}), четырьмя связями первого рода $\mathcal{R}, \mathcal{R}_i$ и двумя связями второго рода $\mathcal{S}, \Omega$. Для такого потенциала взаимодействия двух метрик имеется 7 гравитационных степеней свободы, соответствующих двум для безмассового поля и пяти для массивного.

Здесь при изложении материала мы следовали работам [11, 12]. Для массивной гравитации результаты также были получены в статье [13].

2. ТЕТРАДНЫЕ ПЕРЕМЕННЫЕ

Можно также развить гамильтонов подход к бигравитации, используя тетрадные переменные, связанные с метрикой формулами

$$g^{\mu\nu} = E^\mu_A E^\nu_B h^{AB}, \quad f_{\mu\nu} = F^A_\mu F^B_\nu h_{AB}, \quad (2.1)$$

где h_{AB} — метрика Минковского

$$h_{AB} = \mathrm{diag}\,(-1, 1, 1, 1),$$

(E^μ_A, E^A_μ), (F^A_μ, F^μ_A) — взаимно обратные матрицы тетрад. Вообще тетрадный формализм более сложен, чем метрический. Так как 10 компонент метрического тензора заменяются на 16 компонент тетрады, увеличивается число уравнений связи. Поэтому алгебра связей усложняется. В то же время тетрадное представление позволяет получить явную формулу для потенциала дРГТ. Действительно, матрица

$$\mathsf{X}^{\mu}_{\nu} = E^{\mu A} F_{\nu A} \tag{2.2}$$

оказывается квадратным корнем из матрицы $\mathsf{Y}^{\mu}_{\nu} = g^{\mu\alpha} f_{\alpha\nu}$, если справедливы условия симметрии

$$E^{\mu}_{A} F^{B}_{\mu} - E^{\mu B} F_{\mu A} = 0. \tag{2.3}$$

Тогда удобно заменить уравнения (1.5) эквивалентными формулами для симметричных полиномов

$$\begin{aligned}
e_0 &= 1, \\
e_1 &= \mathrm{Tr}\,\mathsf{X}, \\
e_2 &= \frac{1}{2}\left((\mathrm{Tr}\,\mathsf{X})^2 - \mathrm{Tr}\,\mathsf{X}^2\right), \\
e_3 &= \frac{1}{6}\left((\mathrm{Tr}\,\mathsf{X})^3 - 3\,\mathrm{Tr}\,\mathsf{X}\,\mathrm{Tr}\,\mathsf{X}^2 + 2\,\mathrm{Tr}\,\mathsf{X}^3\right), \\
e_4 &= \frac{1}{24}\left((\mathrm{Tr}\,\mathsf{X})^4 - 6\,(\mathrm{Tr}\,\mathsf{X})^2\,\mathrm{Tr}\,\mathsf{X}^2 + 3\,(\mathrm{Tr}\,\mathsf{X}^2)^2 + 8\,\mathrm{Tr}\,\mathsf{X}\,\mathrm{Tr}\,\mathsf{X}^3 - 6\,\mathrm{Tr}\,\mathsf{X}^4\right) = \\
&= \det \mathsf{X} = \frac{\det ||F_{\mu a}||}{\det ||E_{\mu a}||} \equiv \frac{\sqrt{-f}}{\sqrt{-g}}.
\end{aligned} \tag{2.4}$$

Удобно начать с тетрады привилегированного вида, чтобы потом трансформировать ее к общему виду. Сначала займемся метрикой $g_{\mu\nu}$ и возьмем в качестве тетрады следующую четверку векторов: первый вектор E^{α}_{0} будет единичной нормалью к гиперповерхности состояния $\bar{n}^{\alpha}$, построенной на базе метрики $g_{\mu\nu}$:

$$g_{\mu\nu}\bar{n}^{\mu}e^{\nu}_{i} = 0, \quad g_{\mu\nu}\bar{n}^{\mu}\bar{n}^{\nu} = -1,$$

остальными тремя векторами будут три касательных к гиперповерхности вектора, порожденные триадами индуцированной метрики γ_{ij}. Для этих триад $\mathbf{e}^{a}_{i}$ имеют место уравнения, подобные уравнениям (2.1):

$$\gamma_{ij} = \mathbf{e}^{a}_{i}\mathbf{e}^{b}_{j}\delta_{ab}, \quad \delta_{ab} = \mathrm{diag}\,(1,1,1), \quad \mathbf{e}^{i}_{a}\mathbf{e}_{ib} = \delta_{ab}, \quad \mathbf{e}^{i}_{a}\mathbf{e}_{ja} = \delta^{i}_{j}.$$

Тогда касательные пространственно-временные векторы имеют вид

$$E^{\alpha}_{a} = \mathbf{e}^{i}_{a}\bar{e}^{\alpha}_{i}, \quad \bar{e}^{\alpha}_{i} = e^{\alpha}_{i} \equiv \frac{\partial X^{\alpha}}{\partial x^{i}}.$$

Обратная тетрада будет следующей:

$$E^{0}_{\mu} = -\bar{n}_{\mu}, \quad E^{a}_{\mu} = \bar{e}^{i}_{\mu}\mathbf{e}_{ia}, \quad \bar{e}^{i}_{\mu} \equiv g_{\mu\nu}e^{\nu}_{j}\gamma^{ji}.$$

Действуя подобным образом для метрики $f_{\mu\nu}$, можно также построить привилегированную тетраду

$$\mathcal{F}^0_\mu = -n_\mu, \tag{2.5}$$

$$\mathcal{F}^a_\mu = e^j_\mu \mathbf{f}_{ja}, \quad e^j_\mu = f_{\mu\nu} e^\nu_i \eta^{ij}. \tag{2.6}$$

Тогда общая тетрада F^A_ν может быть получена в результате преобразования буста

$$\Lambda^A{}_B = \begin{pmatrix} \varepsilon & p_b \\ p^a & \mathcal{P}^a_b \end{pmatrix}, \quad \varepsilon = \sqrt{1 + p_a p^a}, \quad \mathcal{P}^a_b = \delta^a{}_b + \frac{1}{\varepsilon + 1} p^a p_b, \tag{2.7}$$

привилегированной $F^A_\nu = \Lambda^A{}_B(p)\mathcal{F}^B_\nu$. Здесь

$$p^a = p_a, \quad h_{AB}\Lambda^A{}_C \Lambda^B{}_D = h_{CD}.$$

После этого мы можем получить матрицу X^μ_ν, определенную уравнением (2.2). Приходим к следующему результату:

$$\mathsf{X}^\mu_\nu = \begin{pmatrix} A[n^\mu n_\nu] & B^j[n^\mu e_{\nu j}] \\ C^i[e^\mu_i n_\nu] & D^{ij}[e^\mu_i e_{\nu j}] \end{pmatrix}, \tag{2.8}$$

где

$$A = -\frac{\varepsilon}{u}, \tag{2.9}$$

$$B^j = \frac{p_a \mathbf{f}^{ja}}{u}, \tag{2.10}$$

$$C^i = \frac{u^i \varepsilon}{u} - p_a \mathbf{e}^{ia}, \tag{2.11}$$

$$D^{ij} = -\frac{u^i p^a \mathbf{f}^{ja}}{u} + \mathbf{f}^{ja} \mathcal{P}_{ab} \mathbf{e}^{ib}. \tag{2.12}$$

После прямого вычисления всех симметричных полиномов (2.4) получаем явное выражение потенциала дРГТ, который оказывается линейным по переменным u, u^i:

$$\tilde{U} = uV + u^i V_i + W. \tag{2.13}$$

Функции V, V_i и W приведены в приложении 1. Они зависят от канонических переменных $\mathbf{e}_{ia}$, $\mathbf{f}_{ia}$ и от вспомогательных переменных p_a. В частности, V_i оказываются линейными по p_a:

$$V_i = -p_a C_{ab} \mathbf{f}_{ib}. \tag{2.14}$$

Так как потенциал совсем не содержит скоростей, он не меняет своего вида при переходе от лагранжева к гамильтонову формализму.

Затем мы должны найти соответствующую гамильтонову форму для $\mathcal{L}_g$ и $\mathcal{L}_f$. Это делается так же, как и в ОТО [25]. Новыми каноническими переменными будут триады $\mathbf{e}_{ia}$, $\mathbf{f}_{ia}$ и сопряженные им импульсы π^{ia}, Π^{ia}; между ними имеют место следующие скобки Пуассона:

$$\{\mathbf{f}_{ia}(x), \Pi^{jb}(y)\} = \{\mathbf{e}_{ia}(x), \pi^{jb}(y)\} = \delta_a^b \delta_i^j \delta(x,y), \tag{2.15}$$

$$\{\mathbf{f}_{ia}(x), \mathbf{e}_{jb}(y)\} = \{\pi^{ia}(x), \Pi^{jb}(y)\} = \{\mathbf{f}_{ia}(x), \mathbf{f}_{jb}(y)\} = 0, \tag{2.16}$$

$$\{\mathbf{e}_{ia}(x), \mathbf{e}_{jb}(y)\} = \{\pi^{ia}(x), \pi^{jb}(y)\} = \{\Pi^{ia}(x), \Pi^{jb}(y)\} = 0. \tag{2.17}$$

Импульсы метрического формализма выражаются через импульсы триад следующим образом:

$$\Pi^{ij} = \frac{1}{4}\left(\mathbf{f}^{ia}\Pi^{ja} + \mathbf{f}^{ja}\Pi^{ia}\right), \tag{2.18}$$

$$\pi^{ij} = \frac{1}{4}\left(\mathbf{e}^{ia}\pi^{ja} + \mathbf{e}^{ja}\pi^{ia}\right). \tag{2.19}$$

Тогда скобки Пуассона метрических импульсов оказываются ненулевыми вне поверхности связей

$$\{\Pi^{ij}(x), \Pi^{k\ell}(y)\} = \frac{1}{4}\left(\eta^{ik}\mathcal{M}^{j\ell} + \eta^{i\ell}\mathcal{M}^{jk} + \eta^{jk}\mathcal{M}^{i\ell} + \eta^{j\ell}\mathcal{M}^{ik}\right), \tag{2.20}$$

$$\{\pi^{ij}(x), \pi^{k\ell}(y)\} = \frac{1}{4}\left(\gamma^{ik}\bar{\mathcal{M}}^{j\ell} + \gamma^{i\ell}\bar{\mathcal{M}}^{jk} + \gamma^{jk}\bar{\mathcal{M}}^{i\ell} + \gamma^{j\ell}\bar{\mathcal{M}}^{ik}\right). \tag{2.21}$$

Здесь возникают новые связи, специфические для тетрадного подхода:

$$\mathcal{M}^{ij} = \frac{1}{4}L_{ab}\mathbf{f}^{ja}\mathbf{f}^{ib} \equiv \frac{1}{4}\left(\mathbf{f}^{ia}\Pi_a^j - \mathbf{f}^{ja}\Pi_a^i\right) = 0, \tag{2.22}$$

$$\bar{\mathcal{M}}^{ij} = \frac{1}{4}\bar{L}_{ab}\,\mathbf{e}^{ja}\,\mathbf{e}^{ib} \equiv \frac{1}{4}\left(\mathbf{e}^{ia}\pi_a^j - \mathbf{e}^{ja}\pi_a^i\right) = 0, \tag{2.23}$$

или, в другой форме,

$$L_{ab} = \mathbf{f}_{ia}\Pi_b^i - \mathbf{f}_{ib}\Pi_a^i = 0, \tag{2.24}$$

$$\bar{L}_{ab} = \mathbf{e}_{ia}\pi_b^i - \mathbf{e}_{ib}\pi_a^i = 0. \tag{2.25}$$

Комбинированный гамильтониан, разумеется, содержит и эти связи:

$$\mathrm{H}_{g+f} = \mathrm{H}_g + \mathrm{H}_f = \int d^3x\left(\bar{N}\bar{\mathcal{H}} + \bar{N}^i\bar{\mathcal{H}}_i + \bar{\lambda}^{ab}\bar{L}_{ab}\right) + \\ + \int d^3x\left(N\mathcal{H} + N^i\mathcal{H}_i + \lambda^{ab}L_{ab}\right), \tag{2.26}$$

наряду со связями $\bar{\mathcal{H}}$, $\bar{\mathcal{H}}_i$, $\mathcal{H}$, $\mathcal{H}_i$, известными из метрического гамильтониана (1.8)–(1.11). Так как в бигравитации две метрики взаимодействуют через потенциал, только диагональные вращения триад $\mathbf{e}_{ia}$, $\mathbf{f}_{ia}$ оставляют гамильтониан инвариантным. Поэтому симметричные комбинации

$$L^+_{ab} = \bar{L}_{ab} + L_{ab} = 0 \tag{2.27}$$

становятся связями первого рода, тогда как связи

$$L^-_{ab} = \bar{L}_{ab} - L_{ab} = 0 \tag{2.28}$$

оказываются второго рода.

Наконец, мы должны учесть условия симметрии (2.3). В гамильтоновых переменных они имеют следующий вид:

$$G_a \equiv p_a + up_b \mathbf{f}^b_j\, \mathbf{e}^j_a - u^j \mathcal{P}_{ab} \mathbf{f}^b_j = 0, \tag{2.29}$$

$$G_{ab} \equiv \mathbf{f}_{ic} \mathcal{P}_{c[a}\, \mathbf{e}^i_{b]} = 0. \tag{2.30}$$

Теперь гамильтониан бигравитации принимает вид

$$\mathrm{H} = \int d^3x N \left[\mathcal{H} + u \left(\bar{\mathcal{H}} + \frac{2m^2}{\kappa} V \right) + u^i \left(\bar{\mathcal{H}}_i + \frac{2m^2}{\kappa} V_i \right) + \frac{2m^2}{\kappa} W \right] + \\ + \int d^3x \left[N^i (\mathcal{H}_i + \bar{\mathcal{H}}_i) + \lambda^+_{ab} L^+_{ab} + \lambda^-_{ab} \bar{L}^-_{ab} + \Lambda^a G_a + \Lambda^{ab} G_{ab} \right]. \tag{2.31}$$

В случае, когда два типа материи, f-материя и g-материя, минимально взаимодействуют каждая со своей метрикой $f_{\mu\nu}$ и $g_{\mu\nu}$, их вклады могут быть включены в связи $\bar{\mathcal{H}}$, $\bar{\mathcal{H}}_i$, $\mathcal{H}$, $\mathcal{H}_i$. Кроме канонических переменных гамильтониан зависит от лагранжевых множителей λ^+_{ab}, λ^-_{ab}, Λ^a, Λ^{ab} с учетом уравнений (2.27)–(2.30) и от других вспомогательных переменных. Варьируя по u, u^i, N, N^i, получаем следующие уравнения:

$$\mathcal{S} = \bar{\mathcal{H}} + \frac{2m^2}{\kappa} V = 0, \tag{2.32}$$

$$\mathcal{S}_i = \bar{\mathcal{H}}_i + \frac{2m^2}{\kappa} V_i, \tag{2.33}$$

$$\mathcal{R} = \mathcal{R}' + u\mathcal{S} + u^i \mathcal{S}_i = 0, \quad \text{где} \quad \mathcal{R}' = \mathcal{H} + \frac{2m^2}{\kappa} W, \tag{2.34}$$

$$\mathcal{R}_i = \mathcal{H}_i + \bar{\mathcal{H}}_i = 0. \tag{2.35}$$

Мы не варьируем по переменной p_a, которая входит в выражение (2.31) нелинейным образом. Уравнения (2.29) можно разрешить относительно u^i:

$$u^i = \mathbf{f}^{ib} \left(\frac{p_b}{\varepsilon} + up_a \mathbf{f}^a_j\, \mathbf{e}^{jc} \mathcal{P}^{-1}_{cb} \right), \tag{2.36}$$

где

$$\mathcal{P}^{-1}_{cb} = \delta_{cb} - \frac{p_c p_b}{\varepsilon(\varepsilon+1)}. \tag{2.37}$$

В уравнения (2.33) переменная p_a входит линейно, поэтому их легко разрешить

$$p_a = \frac{2\kappa}{m^2}||C_{ab}||^{-1} f^{ib}\bar{\mathcal{H}}_i. \tag{2.38}$$

Уравнения (2.30) зависят от канонических переменных $\mathbf{e}^i_b$, $\mathbf{f}_{ic}$ и от вспомогательной переменной p_a. После исключения p_a G_{ab} становятся уравнениями связи. Они имеют ненулевые скобки Пуассона с L^-_{ab} и вместе с ними образуют шесть связей второго рода.

В тетрадном гамильтоновом формализме имеется 18 пар канонических переменных $(\mathbf{e}_{ia}, \pi^{ia})$, $(\mathbf{f}_{ia}, \Pi^{ia})$, 7 связей первого рода $\mathcal{R}'$, $\mathcal{R}_i$, L^+_{ab} и 8 связей второго рода $\mathcal{S}$, Ω, L^-_{ab}, G_{ab}. Разумеется, подсчет дает 7 гравитационных степеней свободы. Вспомогательные переменные p_a определяются из уравнений $\mathcal{S}_i = 0$, которые линейны относительно p_a. Переменные u^i находятся из уравнений $G_a = 0$, линейных по u^i. Последняя вспомогательная переменная u может быть определена из уравнения

$$\dot{\Omega} = 0 = \int d^3x N\left(\{\Omega, \mathcal{R}'\} + u\{\Omega, \mathcal{S}\}\right), \tag{2.39}$$

которое также является линейным по u.

В нашем изложении мы следовали статьям [14, 15]. Другие трактовки можно найти в работах [16, 26, 27].

3. МИНИСУПЕРПРОСТРАНСТВО

Обратимся к космологической задаче, т. е. рассмотрим гамильтонову эволюцию однородной и изотропной Вселенной в теории бигравитации. Для краткости и простоты изложения ограничимся случаем плоского пространства. В основном мы уделим внимание теории с потенциалом дРГТ [2, 3].

Гамильтониан бигравитации является суммой кинетических и потенциальных гравитационных членов, образованных двумя метриками $g_{\mu\nu}$ и $f_{\mu\nu}$, плюс один или два вклада материи.

Примем для обеих метрик анзац Фридмана–Робертсона–Уокера

$$f_{\mu\nu} = (-N^2(t), \omega^2(t)\delta_{ij}), \qquad \sqrt{-f} = N\omega^3, \tag{3.1}$$

$$g_{\mu\nu} = (-N^2(t)u^2(t), \xi^2(t)\delta_{ij}), \quad \sqrt{-g} = Nu\xi^3, \tag{3.2}$$

и введем новую переменную $r = \omega/\xi$.

3.1. Гравитационные потенциальные члены. Для принятого выше вида метрических тензоров (3.1), (3.2) получаем

$$g^{-1}f = g^{\mu\alpha}f_{\alpha\nu} = \mathrm{diag}\,(u^{-2}, r^2\delta_{ij}). \tag{3.3}$$

Предполагаем, что

$$N > 0, \quad u > 0, \quad \xi > 0, \quad \omega > 0. \tag{3.4}$$

При вычислении матричного квадратного корня из положительной диагональной матрицы (3.3) будем рассматривать только один (положительный) корень из каждого положительного выражения*

$$\mathsf{X} = \sqrt{g^{-1}f} = \mathrm{diag}\left(+\sqrt{u^{-2}}, +\sqrt{r^2}\delta_{ij}\right) \equiv \mathrm{diag}\,(u^{-1}, r\delta_{ij}), \tag{3.5}$$

и собственные значения матрицы определяются уравнением

$$\det\,(\mathsf{X} - \lambda I) = 0. \tag{3.6}$$

Легко видеть, что

$$\lambda_1 = u^{-1}, \quad \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 = r, \tag{3.7}$$

и получаем симметричные полиномы

$$e_0 = 1, \tag{3.8}$$

$$e_1 = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4 = \frac{1}{u} + 3r, \tag{3.9}$$

$$e_2 = \lambda_1\lambda_2 + \lambda_1\lambda_3 + \lambda_1\lambda_4 + \lambda_2\lambda_3 + \lambda_2\lambda_4 + \lambda_3\lambda_4 = \frac{3r}{u} + 3r^2, \tag{3.10}$$

$$e_3 = \lambda_1\lambda_2\lambda_3 + \lambda_2\lambda_3\lambda_4 + \lambda_1\lambda_3\lambda_4 + \lambda_1\lambda_2\lambda_4 = \frac{3r^2}{u} + r^3, \tag{3.11}$$

$$e_4 = \lambda_1\lambda_2\lambda_3\lambda_4 = \frac{r^3}{u}. \tag{3.12}$$

Потенциал дРГТ является линейной комбинацией этих полиномов и оказывается линейной функцией переменной u:

$$U = \sqrt{-g}\sum_{i=0}^{4}\beta_i e_i = Nu\xi^3\sum_{i=0}^{4}\beta_i e_i = N(uV + W), \tag{3.13}$$

---

*В данном случае потенциал существенно не изменится, если мы изменим знаки для части собственных значений.

где

$$V = \beta_0\xi^3 + 3\beta_1\xi^2\omega + 3\beta_2\xi\omega^2 + \beta_3\omega^3 \equiv \xi^3 B_0(r), \tag{3.14}$$

$$W = \beta_1\xi^3 + 3\beta_2\xi^2\omega + 3\beta_3\xi\omega^2 + \beta_4\omega^3 \equiv \xi^3 B_1(r), \tag{3.15}$$

$$B_i(r) = \beta_i + 3\beta_{i+1}r + 3\beta_{i+2}r^2 + \beta_{i+3}r^3. \tag{3.16}$$

3.2. Гравитационные кинетические члены. Начиная с гравитационного лагранжиана Гильберта–Эйнштейна для пространственно-временной метрики $\mathcal{G}_{\mu\nu}$

$$\mathcal{L}_{\mathcal{G}} = \frac{1}{\kappa_{\mathcal{G}}}\sqrt{-\mathcal{G}}\mathcal{G}^{\mu\nu}R_{\mu\nu} \tag{3.17}$$

и используя космологический анзац

$$\mathcal{G}_{\mu\nu} = (-\mathcal{N}^2(t), a^2(t)\delta_{ij}), \tag{3.18}$$

получаем (с точностью до полной производной по времени)

$$\mathcal{L}_{\mathcal{G}} = \mathcal{T}_{\mathcal{G}} = -\frac{6a^3\mathcal{N}}{\kappa}\left(\frac{\dot a}{\mathcal{N}a}\right)^2 \equiv -\frac{6a^3\mathcal{N}}{\kappa}H^2, \tag{3.19}$$

где H — постоянная Хаббла.

Определим импульс, канонически сопряженный a:

$$\pi_a = \frac{\partial\mathcal{L}_G}{\partial\dot a} = -\frac{12a}{\mathcal{N}\kappa}\dot a = -\frac{12a^2}{\kappa}H, \quad H = -\frac{\kappa\pi_a}{12a^2}, \quad \{a, \pi_a\} = 1. \tag{3.20}$$

Удобно использовать переменную H вместо π_a, тогда имеем неканоническую скобку Пуассона:

$$\{a, H\} = -\frac{\kappa}{12a^2}. \tag{3.21}$$

В бигравитации кинетическая часть гамильтониана принимает вид

$$\mathrm{H}_{\mathrm{kin}} = \mathcal{T}_f + \mathcal{T}_g = -\frac{6\omega^3 N}{\kappa_f}H_f^2 - \frac{6\xi^3 Nu}{\kappa_g}H_g^2. \tag{3.22}$$

Эта часть порождает кинематические гамильтоновы уравнения

$$\dot\omega = \{\omega, \mathrm{H}_{\mathrm{kin}}\} = N\omega H_f, \quad \dot\xi = \{\xi, \mathrm{H}_{\mathrm{kin}}\} = Nu\xi H_g, \tag{3.23}$$

эквивалентные определению двух постоянных Хаббла H_f, H_g. Легко вывести уравнение эволюции для отношения масштабных факторов r:

$$\dot r = Nr(H_f - uH_g). \tag{3.24}$$

3.3. Вклады материи. *3.3.1. Скалярное поле.* Как пример материи возьмем скалярное поле, минимально взаимодействующее с метрикой

$$\mathcal{L}_\phi = \sqrt{-\mathcal{G}}\left(-\frac{1}{2}\mathcal{G}^{\mu\nu}\phi_{,\mu}\phi_{,\nu} - \mathcal{U}(\phi)\right), \qquad (3.25)$$

где $\mathcal{G}_{\mu\nu}$ — соответствующая метрика, вид которой дан уравнением (3.18) (ниже будут рассмотрены разные случаи), где $\phi_{,\mu} = \partial\phi/\partial x^\mu$. В однородной космологии мы предполагаем, что $\phi = \phi(t)$ и

$$\mathcal{L}_\phi = \mathcal{T}_\phi[\dot\phi] - \mathcal{U}_\phi, \quad \mathcal{H}_\phi = \mathcal{T}_\phi[\pi_\phi] + \mathcal{U}_\phi. \qquad (3.26)$$

Скалярные поля представляют особый интерес при изучении инфляционного сценария в биграватации [28, 29]. Если введенное поле материи взаимодействует только с одной метрикой $\mathcal{G}_{\mu\nu}$, то имеет место простая связь между скоростью и импульсом:

$$\mathcal{T}_\phi = \frac{a^3\dot\phi^2}{2\mathcal{N}}, \quad \pi_\phi = \frac{\partial\mathcal{T}_\phi}{\partial\dot\phi} = \frac{a^3}{\mathcal{N}}\dot\phi, \qquad \dot\phi = \frac{\mathcal{N}}{a^3}\pi_\phi. \qquad (3.27)$$

При рассмотрении материи как идеальной жидкости ее плотность ρ и давление p определяются согласно формулам

$$\rho = \frac{\pi_\phi^2}{2a^6} + \mathcal{U}(\phi), \quad p = \frac{\pi_\phi^2}{2a^6} - \mathcal{U}(\phi). \qquad (3.28)$$

Тогда

$$\mathcal{H}_\phi = \mathcal{N}a^3\rho, \qquad \mathcal{L}_\phi = \mathcal{N}a^3 p. \qquad (3.29)$$

В дальнейшем мы также рассмотрим случай, когда скалярное поле одновременно взаимодействует с метриками $g_{\mu\nu}$ и $f_{\mu\nu}$. Тогда

$$\mathcal{T}_\phi = \frac{\xi^3\dot\phi^2}{2\bar N} + \frac{\omega^3\dot\phi^2}{2N}, \quad \pi_\phi = \frac{\partial\mathcal{T}_\phi}{\partial\dot\phi} = \left(\frac{\xi^3}{u} + \omega^3\right)\frac{\dot\phi}{N}, \quad \dot\phi = \frac{N\pi_\phi}{\dfrac{\xi^3}{u} + \omega^3}, \quad (3.30)$$

и, следовательно,

$$\mathcal{T}_\phi = \frac{N\pi_\phi^2}{2\left(\dfrac{\xi^3}{u} + \omega^3\right)}, \quad \mathcal{U}_\phi = N\left(u\xi^3 + \omega^3\right)\mathcal{U}, \qquad (3.31)$$

$$\mathcal{H}_\phi = N(u\xi^3 + \omega^3)\left(\frac{\pi_\phi^2}{2\left(\dfrac{\xi^3}{u} + \omega^3\right)(u\xi^3 + \omega^3)} + \mathcal{U}(\phi)\right). \qquad (3.32)$$

Здесь $\mathcal{H}_\phi$ является нелинейной функцией от u.

3.3.2. Идеальная жидкость. Различия в описании материи как динамического поля и как идеальной жидкости становятся существенными при рассмотрении второй ветви для взаимодействия материи с эффективной метрикой. Поэтому мы здесь напомним гамильтонову структуру гидродинамики для ОТО. В эйлеровых переменных переход от лагранжева формализма к гамильтонову требует использования переменных Клебша, поэтому начнем непосредственно с гамильтонова описания [30, 31]. Плотность гамильтониана

$$\sqrt{\psi}\rho \tag{3.33}$$

включает в себя вклады энергии покоя

$$\sqrt{\psi}\sigma = \hat{\sigma}, \tag{3.34}$$

внутренней энергии

$$\hat{\sigma}\varepsilon(\sigma,\eta) \tag{3.35}$$

и кинетической энергии жидкости

$$\frac{\psi^{ij}M_iM_j}{\bar{\theta}}, \tag{3.36}$$

где $\psi_{ij} = \mathcal{G}_{\mu\nu}e_i^\mu e_j^\nu$ — индуцированная на пространственной гиперповерхности метрика; ψ^{ij} — обратная к ней матрица; ρ — объемная плотность энергии жидкости; σ — объемная плотность массы; $\hat{\sigma}$ — координатная плотность массы; ε — массовая плотность внутренней энергии; η — объемная плотность энтропии; M_i — плотность импульса. Переменные M_i, $\hat{\sigma}$, η имеют нулевые скобки Пуассона с гравитационными переменными. Ненулевые скобки Пуассона между вышеуказанными переменными имеют следующий вид:

$$\{M_i(x), M_j(y)\} = M_i(y)\delta_{,j}(y,x) - M_j(x)\delta_{,i}(x,y), \tag{3.37}$$

$$\{\hat{\sigma}(x), M_i(y)\} = \hat{\sigma}(y)\delta_{,i}(y,x), \tag{3.38}$$

$$\{\eta(x), M_{,j}(y)\} = -\eta_{,i}\delta(x,y). \tag{3.39}$$

Мы будем рассматривать только сопутствующие системы отсчета, поэтому всюду принимаем $M_i = 0$. Принимая во внимание уравнение (3.18), имеем $\psi_{ij} = a^2\delta_{ij}$, $\psi^{ij} = a^{-2}\delta_{ij}$, $\sqrt{\psi} = a^3$,

$$\hat{\sigma} = a^3\sigma, \qquad \rho = \sigma(1+\varepsilon(\sigma,\eta)) \equiv \frac{\hat{\sigma}}{a^3}\left(1+\varepsilon\left(\frac{\hat{\sigma}}{a^3},\eta\right)\right). \tag{3.40}$$

Независимо от вида гравитационного гамильтониана для жидкости получаем гамильтоновы уравнения движения

$$\dot{\hat{\sigma}} = \{\hat{\sigma}, \mathrm{H}\} = 0 \leftrightarrow \dot{\sigma} = -\frac{3}{a}\sigma, \tag{3.41}$$

$$\dot{\eta} = \{\eta, \mathrm{H}\} = 0, \tag{3.42}$$

$$\dot{\rho} = \{\rho, \mathrm{H}\} = \dot{\sigma}\left(1 + \varepsilon + \sigma\frac{\partial\varepsilon}{\partial\sigma}\right) \equiv -\frac{3}{a}(\rho + p), \tag{3.43}$$

где мы воспользовались термодинамическим соотношением $p = \sigma^2\dfrac{\partial\varepsilon}{\partial\sigma}$. Разумеется, выражение для $\dot{a}$ будет зависеть от гравитационного гамильтониана. Наконец, поскольку плотность энтропии η является константой, будем считать, что $\varepsilon = \varepsilon(\sigma)$ и $p = p(\rho)$.

3.4. Сводка соответствующих формул ОТО.

$$\mathcal{L}_g = \frac{1}{\kappa_g}\sqrt{-g}(g^{\mu\nu}R_{\mu\nu} - 2\Lambda) + \mathcal{L}_M(\phi^A, g_{\mu\nu}), \quad \kappa_g = 16\pi G, \tag{3.44}$$

$$\mathcal{L}_\phi = \sqrt{-g}\left(-\frac{1}{2}g^{\mu\nu}\phi_{,\mu}\phi_{,\nu} - \mathcal{U}(\phi)\right), \tag{3.45}$$

$$R^{\mu\nu} - \frac{1}{2}g^{\mu\nu}(R - 2\Lambda) = \frac{\kappa_g}{2}T^{\mu\nu}, \quad T^{\mu\nu} = \frac{2}{\sqrt{-g}}\frac{\partial\mathcal{L}_M}{\partial g_{\mu\nu}}. \tag{3.46}$$

$$g_{\mu\nu} = (-\bar{N}^2(t), \xi^2(t)\delta_{ij}), \quad \sqrt{-g} = \bar{N}\xi^3, \quad \phi = \phi(t). \tag{3.47}$$

$$\mathcal{L}_g = \bar{N}\xi^3\left(-\frac{6}{\kappa_g}\left(\frac{\dot{\xi}}{\bar{N}\xi}\right)^2 - 2\Lambda\right), \quad H_g = \frac{\dot{\xi}}{\bar{N}\xi}, \quad \pi_\xi = -\frac{12\xi^2}{\kappa_g}H_g. \tag{3.48}$$

$$\mathcal{L}_\phi = \bar{N}\xi^3\left(\frac{1}{2}\left(\frac{\dot{\phi}}{\bar{N}}\right)^2 - \mathcal{U}(\phi)\right), \quad \pi_\phi = \frac{\xi^3}{\bar{N}}\dot{\phi}. \tag{3.49}$$

$$\rho = \frac{{\pi_\phi}^2}{2\xi^6} + U(\phi) = \frac{1}{2}\left(\frac{\dot{\phi}}{\bar{N}}\right)^2 - \mathcal{U}(\phi), \quad p = \frac{{\pi_\phi}^2}{2\xi^6} - \mathcal{U}(\phi). \tag{3.50}$$

$$\mathrm{H} = \bar{N}\xi^3\left(-\frac{6H_g^2}{\kappa_g} + \rho + \frac{2\Lambda}{\kappa_g}\right), \quad \{\xi, H_g\} = -\frac{\kappa_g}{12\xi^2}. \tag{3.51}$$

$$-\frac{6H_g^2}{\kappa_g} + \rho + \frac{2\Lambda}{\kappa_g} = 0, \leftrightarrow \left(\frac{\dot{\xi}}{\bar{N}\xi}\right)^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho + \frac{\Lambda}{3}. \tag{3.52}$$

$$\dot{\xi} = \bar{N}\xi H_g, \tag{3.53}$$

$$\dot{H}_g = -\frac{\bar{N}\kappa_g}{4}(\rho + p) = -4\pi G\bar{N}(\rho + p), \tag{3.54}$$

$$\dot{\rho} = -3\frac{\dot{\xi}}{\xi}(\rho + p). \tag{3.55}$$

Если известны Λ и уравнение состояния материи $p = p(\rho)$, то начальные условия могут быть произвольно заданы для ρ или для H_g. Функция $\bar{N}$ является произвольной в согласии с произволом в выборе параметра времени.

4. ВИДЫ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ С МАТЕРИЕЙ

4.1. f-материя и g-материя. Первые работы по космологии бигравитации [32–35] появились сразу вслед за доказательством Хасана и Розена [4], что бигравитация с потенциалом дРГТ является свободной от духов. Для применения теории к проблеме темной энергии достаточно ввести одну только g-материю, но если обсуждается также проблема темной материи, то имеет смысл допустить и существование f-материи [36, 37].

Если существует два вида материи: f-материя и g-материя, и каждая из них минимально взаимодействует с $f_{\mu\nu}$ и с $g_{\mu\nu}$ соответственно, то

$$\mathrm{H} = \mathrm{H}_{\mathrm{pot}} + \mathrm{H}_{\mathrm{kin}} + \mathrm{H}_{\mathrm{matter}}, \tag{4.1}$$

где

$$\mathrm{H}_{\mathrm{pot}} = \frac{2m^2}{\kappa}N(uV + W), \tag{4.2}$$

$$\mathrm{H}_{\mathrm{kin}} = \frac{1}{\kappa_f}N\left(-6\omega^3 H_f^2\right) + \frac{1}{\kappa_g}Nu\left(-6\xi^3 H_g^2\right), \tag{4.3}$$

$$\mathrm{H}_{\mathrm{matter}} = N\omega^3\rho_f + Nu\xi^3\rho_g. \tag{4.4}$$

Гамильтониан может быть также представлен в виде

$$\mathrm{H} = N\mathcal{R} \equiv N\mathcal{R}' + Nu\mathcal{S}, \tag{4.5}$$

где первичными связями являются $\mathcal{R} \equiv \mathcal{R}' + u\mathcal{S}$ и $\mathcal{S}$, или, лучше, $\mathcal{R}'$ и $\mathcal{S}$:

$$\mathcal{R}' = -\frac{6}{\kappa_f}\omega^3 H_f^2 + \omega^3\rho_f + \frac{2m^2}{\kappa}\xi^3 B_1(r) = 0, \tag{4.6}$$

$$\mathcal{S} = -\frac{6}{\kappa_g}\xi^3 H_g^2 + \xi^3\rho_g + \frac{2m^2}{\kappa}\xi^3 B_0(r) = 0. \tag{4.7}$$

Для скалярных полей имеем

$$\rho_f = \frac{\Pi_\Phi^2}{2\omega^6} + \mathcal{U}_f(\Phi), \tag{4.8}$$

$$\rho_g = \frac{\pi_\phi^2}{2\xi^6} + \mathcal{U}_g(\phi). \tag{4.9}$$

Связи (4.6), (4.7) могут быть записаны как пара уравнений Фридмана:

$$H_f^2 = \frac{\kappa_f}{6}\rho_f + \frac{\Lambda_f}{3}, \qquad \Lambda_f = m^2\frac{\kappa_f}{\kappa}\frac{B_1(r)}{r^3}, \tag{4.10}$$

$$H_g^2 = \frac{\kappa_g}{6}\rho_g + \frac{\Lambda_g}{3}, \qquad \Lambda_g = m^2\frac{\kappa_g}{\kappa}B_0(r). \tag{4.11}$$

Мы видим, что в противоположность ОТО (3.52) космологические члены в бигравитации возникают естественным образом; они являются не постоянными, а динамическими величинами. Гамильтоновы уравнения полей материи дают нам пару законов сохранения

$$\dot\rho_f + 3\frac{\dot\omega}{\omega}(\rho_f + p_f) = 0, \tag{4.12}$$

$$\dot\rho_g + 3\frac{\dot\xi}{\xi}(\rho_g + p_g) = 0. \tag{4.13}$$

Вторичная связь появляется для сохранения первичной связи при эволюции

$$\dot{\mathcal{S}} = \{\mathcal{S}, \mathrm{H}\} = N\{\mathcal{S}, \mathcal{R}'\} \equiv N\Omega = 0, \tag{4.14}$$

где

$$\Omega \equiv \{\mathcal{S}, \mathcal{R}'\} = \frac{6m^2}{\kappa}\left(\omega H_f - \xi H_g\right)\left(\beta_1\xi^2 + 2\beta_2\xi\omega + \beta_3\omega^2\right) = 0. \tag{4.15}$$

Так как вторичная связь факторизована

$$\Omega = \Omega_1\Omega_2, \tag{4.16}$$

ее решения распадаются на две ветви:

$$\Omega_1 = 0, \ \leftrightarrow \ H_g = rH_f, \tag{4.17}$$

и

$$\Omega_2 = 0, \ \leftrightarrow \ \beta_1 + 2\beta_2 r + \beta_3 r^2 = 0. \tag{4.18}$$

Ниже будем рассматривать оба случая.

Переменная u определяется из следующего требования:

$$\dot{\Omega} = \{\Omega, \mathrm{H}\} = N\left(\{\Omega, \mathcal{R}'\} + u\{\Omega, \mathcal{S}\}\right) = 0. \tag{4.19}$$

Здесь имеют место два случая:

$$u = -\frac{\{\Omega_1, \mathcal{R}'\}}{\{\Omega_1, \mathcal{S}\}} \quad \text{или} \quad u = -\frac{\{\Omega_2, \mathcal{R}'\}}{\{\Omega_2, \mathcal{S}\}}. \tag{4.20}$$

Для двух параметров Хаббла получаем два динамических уравнения Гамильтона

$$\dot{H}_f = \{H_f, \mathrm{H}\} = \{H_f, \omega\}\frac{\partial \mathrm{H}}{\partial \omega}, \tag{4.21}$$

$$\dot{H}_g = \{H_g, \mathrm{H}\} = \{H_g, \xi\}\frac{\partial \mathrm{H}}{\partial \xi}, \tag{4.22}$$

которые появляются в следующем явном виде (с учетом уравнений (4.6), (4.7)):

$$\dot{H}_f = -\frac{N\kappa_f}{4}\left[\rho_f + p_f + (1 - ur)\,\frac{2m^2}{\kappa}\frac{D_1(r)}{r^3}\right], \tag{4.23}$$

$$\dot{H}_g = -\frac{Nu\kappa_g}{4}\left[\rho_g + p_g - (1 - ur)\,\frac{2m^2}{\kappa}\frac{D_1(r)}{u}\right], \tag{4.24}$$

где

$$D_i(r) = \beta_i + 2\beta_{i+1}r + \beta_{i+2}r^2. \tag{4.25}$$

4.1.1. Массивная гравитация на фоне пространства Минковского. Если предположить, что $f_{\mu\nu}$ — нединамическая метрика Минковского

$$N = 1, \quad \omega = 1, \qquad r = \frac{1}{\xi}, \tag{4.26}$$

и, разумеется, исключить f-материю

$$\rho_f = 0, \qquad p_f = 0, \tag{4.27}$$

то придем к теории массивной гравитации

$$\mathrm{H} = u\mathcal{S} + \frac{2m^2}{\kappa}W, \tag{4.28}$$

$$\mathcal{S} = \xi^3\left[-\frac{6}{\kappa_g}H_g^2 + \rho_g + \frac{2m^2}{\kappa}B_0\left(\frac{1}{\xi}\right)\right] = 0, \tag{4.29}$$

$$\Omega = -\frac{12m^2}{\kappa}\xi H_g\left(\beta_1\xi^2 + 2\beta_2\xi + \beta_3\right) = 0. \tag{4.30}$$

Из последнего уравнения следует, что нестатические однородные и изотропные пространственно-плоские решения patially здесь отсутствуют. Этот результат был получен в работах [38, 39].

4.1.2. Первая ветвь биграавитации. Из уравнения (4.17) следует связь между двумя постоянными Хаббла, и, принимая в расчет уравнения Фридмана (4.10), (4.11), можно вывести уравнение, связывающее две плотности материи

$$H_f = r^{-1}H_g, \tag{4.31}$$

$$\rho_g = \mu r^2 \rho_f + \frac{2m^2}{\kappa}\left[\mu \frac{B_1(r)}{r} - B_0(r)\right], \tag{4.32}$$

где

$$\mu = \frac{\kappa_f}{\kappa_g}. \tag{4.33}$$

Первое из уравнений (4.20) дает

$$u = \frac{\mu r^3(\rho_f + 3p_f) + \dfrac{2m^2}{\kappa}\big(\mu(B_1 - 3rD_2) + 3r^2 D_1\big)}{r\left[r(\rho_g + 3p_g) + \dfrac{2m^2}{\kappa}\left(r(B_0 - 3D_0) + 3\mu D_1\right)\right]}. \tag{4.34}$$

Уравнение (3.24) принимает вид

$$\dot{r} = (1 - ru)NH_g, \tag{4.35}$$

и фиксированная точка для r появляется при

$$r = \frac{1}{u}. \tag{4.36}$$

Она соответствует пропорциональным пространственно-временным метрикам $f_{\mu\nu} = r^2 g_{\mu\nu}$.

В общем случае для выражения $1 - ur$ получается формула

$$1 - ur = \frac{(\rho_g + 3p_g) - \mu r^2(\rho_f + 3p_f) + \dfrac{4m^2}{\kappa}\left(\dfrac{\mu B_1}{r} - B_0\right)}{(\rho_g + 3p_g) + \dfrac{2m^2}{\kappa}\left(B_0 - 3D_0 + \dfrac{3\mu D_1}{r}\right)}. \tag{4.37}$$

Чтобы решить систему гамильтоновых уравнений, можно взять в качестве начальных данных $\rho_g(t_0)$ и $H_g(t_0)$. Тогда связь $\mathcal{S}$

$$H_g^2 = \frac{\kappa_g}{6}\rho_g + \frac{\Lambda_g}{3} \tag{4.38}$$

позволяет найти $\Lambda_g(t_0)$, а затем $r(t_0) = r_0$ может быть найдено как один из корней кубического уравнения

$$B_0(r_0) = \frac{\Lambda_g(t_0)}{m^2}\frac{\kappa}{\kappa_g}. \tag{4.39}$$

Тогда связь Ω_1

$$H_f = r^{-1} H_g \tag{4.40}$$

дает нам H_f. Связь $\mathcal{R}'$

$$H_f^2 = \frac{\kappa_f}{6}\rho_f + \frac{\Lambda_f}{3}, \quad \Lambda_f = \mu m^2 \frac{\kappa_g}{\kappa}\frac{B_1(r)}{r^3} \tag{4.41}$$

дает ρ_f. С учетом уравнения (4.37) и уравнений состояния $p_g = p_g(\rho)$, $p_f = p_f(\rho)$ можно проинтегрировать динамические уравнения

$$\begin{aligned}
\dot{r} &= (1 - ru) N H_g, \\
\dot{\rho}_g &= -3NuH_g(\rho_g + p_g), \\
\dot{\rho}_f &= -3NH_f(\rho_f + p_f), \\
\dot{H}_g &= -\frac{N\kappa_g}{4}\left[u(\rho_g + p_g) - (1 - ur)\frac{2m^2}{\kappa}D_1(r)\right], \\
\dot{H}_f &= -\frac{N\kappa_f}{4}\left[\rho_f + p_f + (1 - ur)\frac{2m^2}{\kappa}\frac{D_1(r)}{r^3}\right],
\end{aligned}$$

где $N(t)$ есть произвольная монотонная функция, отвечающая за свободу репараметризаций времени.

Кроме общего случая, когда $1 - ur$ дано уравнением (4.37), можно рассмотреть случай, когда оба типа материи имеют одно и то же уравнение состояния

$$p_g = w\rho_g, \quad p_f = w\rho_f, \tag{4.42}$$

тогда уравнение (4.37) упрощается и выглядит следующим образом:

$$1 - ur = \frac{3\left(\frac{1}{2} + w\right)\left(\mu\frac{B_1}{r} - B_0\right)}{B_0 - 3D_0 + \frac{3\mu D_1}{r} + \frac{\kappa}{2m^2}(1 + 3w)\rho_g}. \tag{4.43}$$

4.1.3. Вторая ветвь бигравитации. Во втором случае (4.18) значение переменной r является константой:

$$D_1(r) \equiv \beta_1 + 2\beta_2 r + \beta_3 r^2 = 0, \ \leftrightarrow \ r = \frac{-\beta_2 \pm \sqrt{\beta_2^2 - \beta_1\beta_3}}{\beta_3}. \tag{4.44}$$

Тогда из кинематического условия (3.24) следует

$$u = \frac{H_f}{H_g}. \tag{4.45}$$

Последнее уравнение не является связью, в противоположность уравнению (4.31), следовательно, уравнения Фридмана (4.10), (4.11) и, соответственно, динамика для метрик $g_{\mu\nu}$, $f_{\mu\nu}$ не зависят друг от друга. Динамика двух метрик является той же, что и в ОТО с космологическими постоянными

$$\Lambda_g = m^2 \frac{\kappa_g}{\kappa} B_0(r), \quad \Lambda_f = \mu m^2 \frac{\kappa_g}{\kappa} \frac{B_1(r)}{r^3}. \tag{4.46}$$

Уравнения (4.23), (4.24) принимают вид

$$\dot{H}_f = -\frac{N\kappa_f}{4} \left(\rho_f + p_f\right), \tag{4.47}$$

$$\dot{H}_g = -\frac{Nu\kappa_g}{4} \left(\rho_g + p_g\right) \tag{4.48}$$

и совпадают с уравнениями ОТО (3.54). Если мы, например, поместим себя в g-мир, то единственным артефактом бигравитации будет фиксированное значение Λ_g.

Полный набор уравнений состоит из алгебраических уравнений

$$r = \frac{-\beta_2 \pm \sqrt{\beta_2^2 - \beta_1\beta_3}}{\beta_3}, \tag{4.49}$$

$$H_g^2 = \frac{\kappa_g}{6}\rho_g + \frac{\Lambda_g}{3}, \tag{4.50}$$

$$H_f^2 = \frac{\kappa_f}{6}\rho_f + \frac{\Lambda_f}{3}, \tag{4.51}$$

$$u = \frac{H_f}{H_g} \tag{4.52}$$

и динамических уравнений

$$\dot{H}_g = -\frac{Nu\kappa_g}{4} \left(\rho_g + p_g\right), \tag{4.53}$$

$$\dot{H}_f = -\frac{N\kappa_f}{4} \left(\rho_f + p_f\right), \tag{4.54}$$

$$\frac{\dot{\xi}}{\xi} = \frac{\dot{\omega}}{\omega} = -\frac{\dot{\rho}_g}{3(\rho_g + p_g)} = -\frac{\dot{\rho}_f}{3(\rho_f + p_f)} = NH_f. \tag{4.55}$$

4.2. g-материя без f-материи. Для получения нетривиальных результатов в космологии бигравитации, не вступая при этом в противоречие с данными наблюдений, достаточно рассмотреть случай, когда f-материя отсутствует, что было впервые сделано в работах [32–34]. В общем случае решение допускает эволюцию, начинающуюся со Вселенной, в которой доминирует материя, и развивающуюся в направлении деситтеровской геометрии в поздние времена. Поскольку в теории присутствует достаточно много параметров: β_i, $i = 0, \ldots, 4$, и κ_f, возможные сценарии существенно различаются, включая в себя циклическую Вселенную без космологической сингулярности. Даже тщательный статистический анализ, представленный, например, в статье [35], не позволяет зафиксировать значения свободных параметров.

Предположим, что $\rho_f = 0 = p_f$. Этот случай обсуждался наиболее часто. Поскольку поля материи не появляются в уравнении (4.15) для вторичной связи Ω, имеют место те же две ветви решений, что и в предыдущем пункте:

$$\Omega_1 = \omega H_f - \xi H_g = 0, \tag{4.56}$$

$$\Omega_2 = \beta_1 \xi^2 + 2\beta_2 \xi \omega + \beta_3 \omega^2 = 0. \tag{4.57}$$

Вторая ветвь не дает ничего нового, поэтому рассмотрим только первую ветвь. Пусть для простоты $\kappa = \kappa_g$, тогда связи и динамические уравнения принимают вид

$$\rho_g = \frac{2m^2}{\kappa_g} \left(\mu \frac{B_1(r)}{r} - B_0(r) \right), \tag{4.58}$$

$$H_g^2 = \mu \frac{m^2}{3} \frac{B_1(r)}{r}, \tag{4.59}$$

$$\dot{H}_g = \frac{N}{4} \left[u\kappa_g(\rho_g + p_g) + m^2 (1 - ur) D_1(r) \right], \tag{4.60}$$

$$\dot{H}_f = -\frac{N}{4} \mu m^2 (1 - ur) \frac{D_1(r)}{r^3}, \tag{4.61}$$

$$1 - ur = \frac{(\rho_g + 3p_g) + \dfrac{4m^2}{\kappa_g} \left(\dfrac{\mu B_1}{r} - B_0 \right)}{(\rho_g + 3p_g) + \dfrac{2m^2}{\kappa_g} \left(B_0 - 3D_0 + \dfrac{3\mu D_1}{r} \right)}. \tag{4.62}$$

Здесь мы не можем произвольно задать и ρ_g, и H_g как начальные данные. Может быть выбрана только одна из этих величин, после чего требуется решить уравнение третьей или четвертой степени относительно r. Все переменные, кроме N, могут быть выражены в виде функций от r, а динамика r задается следующим уравнением:

$$\dot{r} = (1 - ru) N H_g, \tag{4.63}$$

где $N(t)$ — произвольная монотонная функция.

Для уравнения состояния $p_g = w\rho_g$ получаем

$$1 - ur = \frac{(1 + w) \left(\dfrac{\mu B_1}{r} - B_0 \right)}{\left(\dfrac{1}{3} + w \right) \dfrac{\mu B_1}{r} - (1 + w) B_0 + \left(r + \dfrac{\mu}{r} \right) D_1}, \tag{4.64}$$

тогда динамические уравнения принимают вид

$$\dot{r} = N \frac{(1+w)\left(\frac{\mu B_1}{r} - B_0\right)\sqrt{\mu \frac{m^2}{3}\frac{B_1(r)}{r}}}{\left(\frac{1}{3}+w\right)\frac{\mu B_1}{r} - (1+w)B_0 + \left(r + \frac{\mu}{r}\right) D_1}, \tag{4.65}$$

$$\dot{H}_g = N\frac{m^2}{4} \frac{(1+w)\left[\left(\frac{2\mu}{3r^2}+3\right)B_1 - \left(\frac{2\mu}{r^2}+3\right) rD_2\right]}{\left(\frac{1}{3}+w\right)\frac{\mu B_1}{r} - (1+w)B_0 + \left(\frac{\mu}{r^2}+1\right) rD_1}. \tag{4.66}$$

4.3. Одна материя минимально взаимодействует с двумя метриками. Рассмотрим скалярное поле, минимально взаимодействующее с обеими метриками [40–43] $f_{\mu\nu}$ и $g_{\mu\nu}$:

$$\mathcal{L}_\phi = \sqrt{-f}\left(-\frac{1}{2}f^{\mu\nu}\phi_{,\mu}\phi_{,\nu} - \mathcal{U}(\phi)\right) + \sqrt{-g}\left(-\frac{1}{2}g^{\mu\nu}\phi_{,\mu}\phi_{,\nu} - \mathcal{U}(\phi)\right). \tag{4.67}$$

В однородной космологии предполагается, что $\phi = \phi(t)$ и

$$\mathrm{H}_{\mathrm{matter}} = \mathcal{H}_\phi = N\xi^3\rho, \quad \rho = \frac{\pi_\phi^2}{2\xi^6\left(\frac{1}{u}+r^3\right)} + (u+r^3)\,\mathcal{U}(\phi). \tag{4.68}$$

Тогда гамильтониан имеет вид

$$\mathrm{H} = \mathrm{H}_{\mathrm{pot}} + \mathrm{H}_{\mathrm{kin}} + \mathrm{H}_{\mathrm{matter}} = N\mathcal{R}, \tag{4.69}$$

и уравнения первичных связей

$$\begin{aligned} \mathcal{R} &= \xi^3\left[-6\left(\frac{r^3H_f^2}{\kappa_f} + \frac{uH_g^2}{\kappa_g}\right) + \rho(u) + \frac{2m^2}{\kappa}\left(B_1(r) + uB_0(r)\right)\right] = 0, \\ \mathcal{S} &\equiv \frac{\partial\mathcal{R}}{\partial u} = \xi^3\left[-\frac{6H_g^2}{\kappa_g} + \rho'(u) + \frac{2m^2}{\kappa}B_0(r)\right], \end{aligned} \tag{4.70}$$

где

$$\rho'(u) = \frac{\partial\rho}{\partial u}, \tag{4.71}$$

но теперь и $\mathcal{R}$ и $\mathcal{S}$ нелинейно зависят от вспомогательной переменной u. Мы должны решать уравнение $\mathcal{S} = 0$ относительно u и затем подставлять результат в уравнение для $\mathcal{R}$. Таким образом, эта модель содержит только одну связь (первого рода) $\mathcal{R} = 0$, отвечающую инвариантности относительно перепараметризаций времени, поэтому эта модель не свободна от духа Бульвара–Дезера, как и модель, которая будет рассмотрена в разд. 5. Здесь можно произвольно задавать больше начальных данных, чем в предыдущих пунктах, например, можно задать ρ, H_g и H_f.

4.4. Материя, минимально взаимодействующая с эффективной метрикой. Новый вариант взаимодействия между материей и бигравитацией появляется при введении эффективной метрики. Если не ограничиваться минисуперпространством, то взаимодействие с эффективной метрикой ведет к возвращению духа, как было показано в работах [15, 43–46]. Тем не менее утверждается [43, 44], что существует интересная область применения такого взаимодействия на масштабах энергий ниже обрезания. В работе [47] утверждалось, что можно избавиться от духа в тетрадном формализме, который не эквивалентен метрическому. Затем это утверждение было оспорено [48].

Впервые анализ космологии бигравитации на основе этой модели был дан в статье [49]. Эффективная метрика строится по формуле

$$\mathcal{G}_{\mu\nu} = \alpha^2 g_{\mu\nu} + 2\alpha\beta g_{\mu\alpha}\mathsf{X}^{\alpha}_{\nu} + \beta^2 f_{\mu\nu}, \tag{4.72}$$

где α и β — произвольные константы. На языке тетрад такое построение возникает из линейной комбинации двух тетрад

$$\alpha E^A_\mu + \beta F^A_\mu. \tag{4.73}$$

Такая возможность для специального случая $\alpha = \beta$ впервые была упомянута в работе [26]. В мини-суперпространстве компоненты эффективной метрики будем обозначать следующим образом:

$$\mathcal{G}_{00} = -\mathcal{N}^2, \quad \mathcal{G}_{0i} = 0, \quad \mathcal{G}_{ij} = a^2\delta_{ij} \equiv \psi_{ij}, \tag{4.74}$$

где

$$\mathcal{N} = N(\alpha u + \beta), \quad a = \alpha\xi + \beta\omega. \tag{4.75}$$

Имеют место следующие стандартные соотношения:

$$\sqrt{-\mathcal{G}} = \mathcal{N}\sqrt{\psi}, \quad \sqrt{\psi} = a^3, \tag{4.76}$$

где

$$\mathcal{G} = \det(\mathcal{G}_{\mu\nu}), \quad \psi = \det(\psi_{ij}). \tag{4.77}$$

Первичные связи будут следующими:

$$\mathcal{S} = -\frac{6\xi^3}{\kappa_g}{H_g}^2 + \alpha\hat{\mathcal{H}}^{(m)} + \frac{2m^2}{\kappa}\xi^3 B_0(r), \tag{4.78}$$

$$\mathcal{R}' = -\frac{6\omega^3}{\kappa_f}{H_f}^2 + \beta\hat{\mathcal{H}}^{(m)} + \frac{2m^2}{\kappa}\xi^3 B_1(r), \tag{4.79}$$

где предполагается, что канонические переменные (ϕ, π_ϕ), описывающие скалярное поле, зависят только от временной переменной, и, следовательно,

$$\hat{\mathcal{H}}^{(m)} = \frac{\pi_\phi^2}{2a^3} + a^3\mathcal{U}(\phi). \tag{4.80}$$

Введем обозначение для плотности энергии материи

$$\rho = \frac{\hat{\mathcal{H}}^{(m)}}{a^3} \equiv \frac{\pi_\phi^2}{2a^6} + \mathcal{U}(\phi). \tag{4.81}$$

Гамильтониан в мини-суперпространстве будет иметь вид

$$\mathrm{H} = N(\mathcal{R}' + u\mathcal{S}), \tag{4.82}$$

а скобки Пуассона будут следующими:

$$\{\xi, H_g\} = -\frac{\kappa_g}{12\xi^2}, \quad \{\omega, H_f\} = -\frac{\kappa_f}{12\omega^2}, \quad \{\phi, \pi_\phi\} = 1. \tag{4.83}$$

Удобно переписать уравнения (4.78), (4.79) иначе:

$$\mathcal{S} = \xi^3\left[-\frac{6}{\kappa_g}{H_g}^2 + \alpha(\alpha+\beta r)^3\rho + \frac{2m^2}{\kappa}B_0(r)\right], \tag{4.84}$$

$$\mathcal{R}' = \omega^3\left[-\frac{6}{\kappa_f}{H_f}^2 + \frac{\beta}{r^3}(\alpha+\beta r)^3\rho + \frac{2m^2}{\kappa}\frac{B_1(r)}{r^3}\right]. \tag{4.85}$$

Потребовав сохранения равенства $\mathcal{S} = 0$ в ходе эволюции, получим вторичную связь

$$\dot{\mathcal{S}} = \{\mathcal{S}, \mathrm{H}\} = N\Omega, \quad \to \quad \Omega = 0, \tag{4.86}$$

где Ω имеет вид

$$\Omega = \{\mathcal{S}, \mathcal{R}'\} = \frac{6m^2}{\kappa}(\omega H_f - \xi H_g)\left(\beta_1\xi^2 + 2\beta_2\xi\omega + \beta_3\omega^2 - \frac{\kappa}{2m^2}\alpha\beta a^2 p\right), \tag{4.87}$$

и введем обозначение для давления

$$p = \frac{\pi_\phi^2}{2a^6} - \mathcal{U}(\phi). \tag{4.88}$$

После вычисления

$$\{\Omega, \mathcal{S}\} = \Delta \neq 0 \tag{4.89}$$

убеждаемся, что Ω и $\mathcal{S}$ являются связями второго рода. Можно ввести скобки Дирака

$$\{F, G\}_D = \{F, G\} - \frac{\{F, \Omega\}\{\mathcal{S}, G\} - \{F, \mathcal{S}\}\{\Omega, G\}}{\Delta} \tag{4.90}$$

и рассматривать $\mathcal{R}'$ как связь первого рода. Редуцированный гамильтониан и уравнения движения тогда будут выглядеть так:

$$\mathrm{H}_{\mathrm{reduced}} = N\mathcal{R}', \quad \dot{F} = \{F, \mathrm{H}_{\mathrm{reduced}}\}_D. \tag{4.91}$$

Эквивалентным образом можно вывести гамильтоновы уравнения, пользуясь скобками Пуассона, если после их вычисления подставить вместо переменной u выражение, найденное из уравнения

$$\dot{\Omega} = \{\Omega, \mathrm{H}\} \equiv N\left(\{\Omega, \mathcal{R}'\} + u\{\Omega, \mathcal{S}\}\right) = 0, \tag{4.92}$$

т. е.

$$u = -\frac{1}{\Delta}\{\Omega, \mathcal{R}'\}. \tag{4.93}$$

Так как Ω факторизуется (4.87) (сравнить с уравнением (4.16))

$$\Omega = \Omega_1\Omega_2, \tag{4.94}$$

имеют место два разных решения:

$$\Omega_1 = \omega H_f - \xi H_g = 0 \tag{4.95}$$

или

$$\Omega_2 = \beta_1\xi^2 + 2\beta_2\omega\xi + \beta_3\omega^2 - \frac{\kappa}{2m^2}\alpha\beta a^2 p = 0. \tag{4.96}$$

Ниже рассмотрим оба случая. Отметим, что во втором случае разные результаты получаются для материи в виде идеальной жидкости, где $\{\rho, p\} = 0$, и для материи в виде скалярного поля, где $\{\rho, p\} \neq 0$.

Имея в своем распоряжении гамильтониан (4.82) и скобки Пуассона (4.83), можем вывести кинематические гамильтоновы уравнения, которые, разумеется, эквивалентны определениям постоянных Хаббла (см. (3.23) для сравнения) и импульса скалярного поля

$$\dot{\xi} = \{\xi, H_g\}N\left(\frac{\partial\mathcal{R}'}{\partial H_g} + u\frac{\partial\mathcal{S}}{\partial H_g}\right) = Nu\xi H_g, \tag{4.97}$$

$$\dot{\omega} = \{\omega, H_f\}N\left(\frac{\partial\mathcal{R}'}{\partial H_f} + u\frac{\partial\mathcal{S}}{\partial H_f}\right) = N\omega H_f, \tag{4.98}$$

$$\dot{\phi} = \{\phi, \mathrm{H}\} = N\left(\frac{\partial\mathcal{R}'}{\partial \pi_\phi} + u\frac{\partial\mathcal{S}}{\partial \pi_\phi}\right) = N(\alpha u + \beta)\frac{\pi_\phi}{a^3}. \tag{4.99}$$

Комбинируя кинематические и динамические гамильтоновы уравнения скалярного поля (т. е. материи)

$$\dot{\phi} = N(\alpha u + \beta)\frac{\pi_\phi}{a^3}, \quad \dot{\pi}_\phi = -N(\alpha u + \beta)a^3\mathcal{U}'(\phi),$$

получаем закон сохранения энергии

$$\frac{\pi_\phi \dot{\pi}_\phi}{a^3} + a^3 \dot{\phi} \mathcal{U}'(\phi) = 0,$$

который может быть записан в стандартной форме

$$\dot{\rho} + 3\frac{\dot{a}}{a}(\rho + p) = 0. \tag{4.100}$$

Динамические гамильтоновы уравнения для гравитационных переменных имеют следующий вид:

$$\dot{H}_f = -\frac{N\kappa_f}{4r^3}\left[\beta\left(\alpha + \beta r\right)^3 \left(\rho + p\frac{\beta + \alpha u}{\beta + \dfrac{\alpha}{r}}\right) + \right. \tag{4.101}$$

$$\left. + \frac{2m^2}{\kappa}\left(1 - ur\right) D_1(r)\right], \tag{4.102}$$

$$\dot{H}_g = -\frac{Nu\kappa_g}{4}\left[\alpha\left(\alpha + \beta r\right)^3 \left(\rho + \frac{p}{ur}\frac{\beta + \alpha u}{\beta + \dfrac{\alpha}{r}}\right) - \right. \tag{4.103}$$

$$\left. - \frac{2m^2}{\kappa}(1 - ur)\frac{D_1(r)}{u}\right] \tag{4.104}$$

(см. (4.23), (4.24) для сравнения). Как правило, уравнение состояния материи считается известным.

4.4.1. Первая ветвь. Здесь будет рассмотрено следующее решение уравнения связи $\Omega = 0$:

$$\Omega_1 = \omega H_f - \xi H_g = 0, \;\rightarrow\; H_f = r^{-1} H_g.$$

Тогда для параметров Хаббла получаем

$$H_f = \frac{\dot{\omega}}{N\omega}, \qquad H_g = \frac{\dot{\xi}}{Nu\xi}, \qquad H = \frac{\dot{a}}{N(\alpha u + \beta)a}, \tag{4.105}$$

и верны следующие соотношения:

$$H_g = rH_f, \qquad H_f = H\left(\frac{\alpha}{r} + \beta\right), \qquad H_g = H(\alpha + \beta r). \tag{4.106}$$

Связи (4.84), (4.85) эквивалентны следующим уравнениям, подобным уравнению Фридмана:

$$H_f^2 = \frac{\kappa_f}{6r^3}\left(\beta\left(\alpha + \beta r\right)^3 \rho + \frac{2m^2}{\kappa} B_1(r)\right), \tag{4.107}$$

$$H_g^2 = \frac{\kappa_g}{6}\left(\alpha(\alpha + \beta r)^3 \rho + \frac{2m^2}{\kappa} B_0(r)\right), \tag{4.108}$$

которые содержат множество параметров $\alpha, \beta, \beta_0, \ldots, \beta_4$ и новую переменную $r(t)$. Удобно будет переписать эти уравнения в виде

$$H_f^2 = \frac{\kappa_f}{6}\rho_f + \frac{\Lambda_f}{3}, \tag{4.109}$$

$$H_g^2 = \frac{\kappa_g}{6}\rho_g + \frac{\Lambda_g}{3}, \tag{4.110}$$

где

$$\rho_f = \beta\left(\frac{\alpha}{r} + \beta\right)^3 \rho, \tag{4.111}$$

$$\rho_g = \alpha(\alpha + \beta r)^3 \rho, \tag{4.112}$$

$$\Lambda_f = m^2 \frac{\kappa_f}{\kappa} \frac{B_1(r)}{r^3}, \tag{4.113}$$

$$\Lambda_g = m^2 \frac{\kappa_g}{\kappa} B_0(r). \tag{4.114}$$

Из уравнения (4.93) получаем

$$u = \frac{\dfrac{B_1}{r} - 3D_2 + 3\mu^{-1} r D_1 + \dfrac{\kappa}{2m^2}\beta(\alpha + \beta r)^3 \left(\rho r^{-1} + 3p\dfrac{\beta - \mu^{-1} r\alpha}{\alpha + \beta r}\right)}{3D_1 + \mu^{-1} r(B_0 - 3D_0) + \dfrac{\kappa}{2m^2}\alpha(\alpha + \beta r)^3 \left(\rho\mu^{-1} r - 3p\dfrac{\beta - \mu^{-1} r\alpha}{\alpha + \beta r}\right)}, \tag{4.115}$$

где

$$D_i = \beta_i + 2\beta_{i+1} r + \beta_{i+2} r^2, \qquad B_i = D_i + r D_{i+1}. \tag{4.116}$$

С учетом уравнений (4.106) задачу можно переформулировать в виде двух различных уравнений типа уравнения Фридмана для переменной H:

$$H^2 = \frac{\kappa_g}{6}\alpha(\alpha + \beta r)\rho + \frac{m^2}{3}\frac{\kappa_g}{\kappa}\frac{B_0}{(\alpha + \beta r)^2}, \tag{4.117}$$

$$H^2 = \frac{\kappa_f}{6r}\beta\left(\alpha + \beta r\right)\rho + \frac{m^2}{3r}\frac{\kappa_f}{\kappa}\frac{B_1}{(\alpha + \beta r)^2}. \tag{4.118}$$

Эту систему можно разрешить относительно плотности материи

$$\rho = \mu^{-1} r \frac{2m^2}{\kappa} \frac{\dfrac{\mu B_1(r)}{r} - B_0(r)}{(\alpha + \beta r)^3\left(\mu^{-1} r\alpha - \beta\right)}. \tag{4.119}$$

Обратно, исключая ρ, получаем

$$H^2 = \frac{m^2}{3}\frac{\alpha B_1(r) - \beta B_0(r)}{(\alpha + \beta r)^2\left(\mu^{-1} r\alpha - \beta\right)}\frac{\kappa_g}{\kappa}; \tag{4.120}$$

также можно выразить космологическую постоянную в виде функции от переменной r:

$$\Lambda = m^2 \frac{\kappa_g}{\kappa} \frac{B_0}{(\alpha + \beta r)^2}. \tag{4.121}$$

Если задана ненаблюдаемая переменная r, то можно вычислить ρ, H и Λ из уравнений (4.119)–(4.121). Обратно, если задать начальное значение для наблюдаемой ρ или для H, то, решив уравнение третьей или четвертой степени, можно получить несколько возможных значений для r. Динамическое уравнение для r:

$$\dot{r} = \dot{a}(1 - ur) \frac{\alpha + \beta r}{\beta + \alpha u}, \tag{4.122}$$

позволяет вычислить эволюцию этой переменной со временем и, таким образом, вычислить эволюцию (вперед или назад по времени) для всех переменных. Для важного множителя $1 - ur$ получаем формулу

$$1 - ur = \frac{\alpha(\alpha + \beta r)^3 (\rho + 3p) \left(1 - \frac{\beta\mu}{\alpha r}\right) + \frac{4m^2}{\kappa} \left(\frac{\mu B_1}{r} - B_0\right)}{\alpha(\alpha + \beta r)^3 \left(\rho - 3p \frac{\beta - \mu^{-1} r \alpha}{\alpha + \beta r}\right) + \frac{2m^2}{\kappa} \left(B_0 - 3D_0 + \frac{3\mu D_1}{r}\right)}. \tag{4.123}$$

Уравнение (4.123) можно упростить, учитывая уравнение состояния материи $p = w\rho$:

$$1 - ur = \frac{3(1 + w) \left(\frac{\mu B_1}{r} - B_0\right)}{B_0 - 3D_0 + \frac{3\mu D_1}{r} + \left(\frac{\mu B_1}{r} - B_0\right) \left(\frac{1}{1 - \frac{\mu\beta}{\alpha r}} + \frac{3w}{1 + \frac{\beta}{\alpha} r}\right)}. \tag{4.124}$$

Функция $r(t)$ может не быть монотонной и менять свое поведение при $r = 1/u$.

4.4.2. Вторая ветвь. Вторая ветвь $\Omega_2 = 0$ дает следующее уравнение:

$$\beta_1 \xi^2 + 2\beta_2 \xi \omega + \beta_3 \omega^2 - \frac{\kappa}{2m^2} \alpha\beta a^2 p = 0,$$

или, эквивалентно,

$$p = \frac{2m^2}{\kappa} \frac{D_1(r)}{\alpha\beta(\alpha + \beta r)^2}.$$

Это уравнение позволяет выразить давление материи p в виде функции от переменной r. Если уравнение состояния позволяет выразить плотность энергии материи ρ через давление, то из уравнений связи (4.85), (4.84) можно определить H_g и H_f. Эволюция этих величин определяется гамильтоновыми уравнениями

$$\dot{H}_g = -\frac{Nu\kappa_g}{4}\alpha(\alpha+\beta r)^3(\rho+p), \tag{4.125}$$

$$\dot{H}_f = -\frac{N\kappa_f}{4r^3}\beta(\alpha+\beta r)^3(\rho+p). \tag{4.126}$$

Комбинируя уравнения (4.125), (4.126), получим соотношение

$$\frac{\dot{H}_g}{\dot{H}_f} = \mu^{-1}\frac{\alpha}{\beta}ur^3. \tag{4.127}$$

В лагранжевом формализме подробный анализ решений для второй ветви был проведен в работе [50]. Отметим, что для второй ветви решений уравнений связи не только биграватация, но и массивная теория гравитации позволяет получить динамическую эволюцию масштабного фактора при плоской фоновой метрике, правда, не удается сделать эту эволюцию соответствующей наблюдениям [51].

4.4.3. Массивная гравитация. Пусть метрика $f_{\mu\nu}$ фиксирована и выбрана в виде $(-1,1,1,1)$. Тогда $N=1$, $\omega=1$, $\kappa=\kappa_g$ и $\mathcal{R}'$ больше не является связью

$$\mathcal{R}' = \beta(\alpha\xi+\beta)^3\rho + \frac{2m^2}{\kappa}(\beta_1\xi^3+3\beta_2\xi^2+3\beta_3\xi+\beta_4). \tag{4.128}$$

Гамильтониан

$$\mathrm{H} = \mathcal{R}' + u\mathcal{S} \tag{4.129}$$

уже не обязательно обращается в нуль, но, разумеется, остается интегралом движения.

В модели имеется пара связей второго рода: $\mathcal{S}=0$ и $\Omega=0$, причем

$$\mathcal{S} = -\frac{6\xi^3{H_g}^2}{\kappa} + \alpha(\alpha\xi+\beta)^3\rho + \frac{2m^2}{\kappa}(\beta_0\xi^3+3\beta_1\xi^2+3\beta_2\xi+\beta_3), \tag{4.130}$$

$$\Omega = -3\xi H_g\left(\frac{2m^2}{\kappa}(\beta_1\xi^2+2\beta_2\xi+\beta_3) - \alpha\beta(\alpha\xi+\beta)^2p\right). \tag{4.131}$$

Нас не интересуют статические решения, поэтому обозначим существенный множитель в факторизующейся связи Ω через $\Omega_2 = \Omega/(-3\xi H_g)$ и будем рассматривать в качестве связей $\mathcal{S}$ и Ω_2. Их скобка Пуассона

$$\{\Omega_2,\mathcal{S}\} = \frac{\partial\Omega_2}{\partial\xi}\frac{\partial\mathcal{S}}{\partial H_g}\{\xi,H_g\} + \frac{\partial\Omega_2}{\partial p}\frac{\partial\mathcal{S}}{\partial\rho}\{p,\rho\} \tag{4.132}$$

отлична от нуля, причем второе слагаемое равно нулю в случае идеальной жидкости, но не для скалярного поля:

$$\{p,\rho\} \equiv \left\{\frac{{\pi_\phi}^2}{2(\alpha\xi+\beta)^6} - U(\phi), \frac{{\pi_\phi}^2}{2(\alpha\xi+\beta)^6} + U(\phi)\right\} = -\frac{2\pi_\phi U'(\phi)}{(\alpha\xi+\beta)^6}. \quad (4.133)$$

Лагранжев множитель u должен быть определен из условия согласованности связи Ω_2 с гамильтоновой эволюцией

$$\dot{\Omega}_2 = \{\Omega_2, \mathcal{R}'\} + u\{\Omega_2, \mathcal{S}\} = 0, \quad (4.134)$$

т. е.

$$u = -\frac{\{\Omega_2, \mathcal{R}'\}}{\{\Omega_2, \mathcal{S}\}}. \quad (4.135)$$

В случае идеальной жидкости получаем $u = 0$, и метрика $g_{\mu\nu}$ оказывается вырожденной. А для скалярного поля получаем

$$u = -\frac{\beta}{\alpha}\times$$
$$\times\left(1 + \xi H_g \frac{\left[\frac{4m^2}{\kappa\alpha^2\beta}(\alpha\xi+\beta)(\beta_1\xi+\beta_2) + (\alpha\xi+\beta)^2\left(\frac{{\pi_\phi}^2}{(\alpha\xi+\beta)^6} + U(\phi)\right)\right]}{2\pi_\phi U'(\phi)}\right)^{-1}. \quad (4.136)$$

Поскольку наблюдаемое движение материи связано с эффективной метрикой, необходимо найти соответствующую ей постоянную Хаббла

$$H = \frac{\dot{a}}{\hat{N}a} \equiv \frac{\alpha\dot{\xi}}{(\alpha u+\beta)(\alpha\xi+\beta)} = \frac{\xi H_g}{\left(1+\frac{\beta}{\alpha u}\right)(\alpha\xi+\beta)}. \quad (4.137)$$

После учета уравнения (4.136) для H получаем выражение

$$H = -\frac{2\pi_\phi U'(\phi)}{\frac{4m^2}{\kappa\alpha^2\beta}(\alpha\xi+\beta)^2(\beta_1\xi+\beta_2) + (\alpha\xi+\beta)^3\left(\frac{{\pi_\phi}^2}{(\alpha\xi+\beta)^6} + U(\phi)\right)}. \quad (4.138)$$

Если воспользоваться уравнением $\Omega_2 = 0$, то можно записать этот результат иначе:

$$H =$$
$$= -\frac{2\pi_\phi U'(\phi)}{3(\alpha\xi+\beta)^3 U(\phi) + \frac{4m^2(\alpha\xi+\beta)}{\kappa\alpha\beta}\left[\left(\xi+\frac{\beta}{\alpha}\right)(\beta_1\xi+\beta_2) + \beta_1\xi^2 + 2\beta_2\xi + \beta_3\right]}. \quad (4.139)$$

Имеется исключительный выбор параметров потенциала

$$\beta_2 = \beta_1 \frac{\beta}{\alpha}, \quad \beta_3 = \beta_1 \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^2, \tag{4.140}$$

при котором зависимость H от ϕ и $a = \alpha\xi + \beta$ сильно упрощается:

$$H = -\frac{\pi_\phi U'(\phi)}{a^3} \frac{2}{3U(\phi) + \dfrac{8m^2}{\kappa} \dfrac{\beta_1}{\alpha^3 \beta}}, \tag{4.141}$$

и с учетом кинематического гамильтонова уравнения для скалярного поля (4.99) можно записать

$$\frac{\dot{a}}{a} = -\frac{2\dot{U}}{3U + \dfrac{8m^2}{\kappa} \dfrac{\beta_1}{\alpha^3 \beta}}. \tag{4.142}$$

Интегрирование последнего уравнения дает возможность выразить масштабный фактор эффективной метрики как функцию скалярного поля

$$a(\phi) = a(\phi_0) \left(\frac{U(\phi_0) + \dfrac{8m^2}{3\kappa} \dfrac{\beta_1}{\alpha^3 \beta}}{U(\phi) + \dfrac{8m^2}{3\kappa} \dfrac{\beta_1}{\alpha^3 \beta}} \right)^{2/3}. \tag{4.143}$$

5. СЛУЧАЙ ОТЛИЧНОГО ОТ дРГТ ПОТЕНЦИАЛА

5.1. Биграватация с потенциалом РТГ. Пусть потенциал биграватации отличается от потенциала дРГТ. Рассмотрим, например, потенциал релятивистской теории гравитации (РТГ) [52, 53]:

$$U = \frac{1}{2} \left[\sqrt{-g} \left(\frac{1}{2} g^{\mu\nu} f_{\mu\nu} - 1 \right) - \sqrt{-f} \right]. \tag{5.1}$$

Тогда в обозначениях $3 + 1$ мини-суперпространства имеем

$$\sqrt{-g} = N u \xi^3, \qquad \sqrt{-f} = N \omega^3, \qquad g^{\mu\nu} f_{\mu\nu} = \frac{1}{u^2} + 3r^2, \tag{5.2}$$

$$U = \frac{1}{2} N \left(\frac{\xi^3}{2u} + \frac{3}{2} u \xi \omega^2 - u \xi^3 - \omega^3 \right) \equiv N \tilde{U} \tag{5.3}$$

и получаем

$$V = \frac{\partial \tilde{U}}{\partial u} = \frac{1}{2}\left(-\frac{\xi^3}{2u^2} - \xi^3 + \frac{3}{2}\xi\omega^2\right), \tag{5.4}$$

$$W = \tilde{U} - u\frac{\partial \tilde{U}}{\partial u} = \frac{1}{2}\left(\frac{\xi^3}{u} - \omega^3\right). \tag{5.5}$$

Следовательно, уравнения, аналогичные связям, будут следующими:

$$\mathcal{R}' = \mathcal{H} + \frac{2m^2}{\kappa}W = \omega^3\left[-\frac{6H_f^2}{\kappa_f} + \rho_f + \frac{m^2}{\kappa}\left(\frac{1}{ur^3} - 1\right)\right] = 0, \tag{5.6}$$

$$\mathcal{S} = \bar{\mathcal{H}} + \frac{2m^2}{\kappa}V = \xi^3\left[-\frac{6H_g^2}{\kappa_g} + \rho_g + \frac{m^2}{\kappa}\left(-\frac{1}{2u^2} - 1 + \frac{3}{2}r^2\right)\right] = 0, \tag{5.7}$$

но при этом в оба уравнения (5.6), (5.7) входит вспомогательная переменная u. Тогда необходимо найти u из одного уравнения и подставить в другое. Таким образом, в действительности у нас имеется только одна связь. Это связь первого рода, появляющаяся вследствие инвариантности би-РТГ относительно перепараметризации времени. По этой причине переменная N остается произвольной. В качестве начальных данных можно выбрать, например, ρ_g, ρ_f, H_g и H_f. Очевидно, что в этой теории на одну гравитационную степень свободы больше, чем в теориях с потенциалом дРГТ. В результате теория би-РТГ не подходит для описания наблюдаемой космологии и никогда не обсуждалась в литературе. Мы увидим ниже, что при переходе к массивной гравитации РТГ число степеней свободы окажется адекватным космологической задаче.

Динамические гамильтоновы уравнения в обсуждаемом примере имеют вид

$$\dot{H}_f = -\frac{N\kappa_f}{4}\left[\rho_f + p_f + \frac{m^2}{\kappa}\frac{1-(ur)^2}{ur^3}\right], \tag{5.8}$$

$$\dot{H}_g = -\frac{Nu\kappa_g}{4}\left[\rho_g + p_g - \frac{m^2}{\kappa}\frac{1-(ur)^2}{u^2}\right]. \tag{5.9}$$

5.2. Массивная гравитация с потенциалом РТГ. Если мы будем считать одну из метрик, например $f_{\mu\nu}$, фоновой метрикой Минковского, то будем иметь соотношения $\omega \equiv 1$, $H_f = 0$, $\rho_f = 0$, и решением уравнения (5.6) будет

$$u = \frac{1}{r^3} \equiv \frac{\xi^3}{\omega^3} = \xi^3. \tag{5.10}$$

Подставив это выражение в $\mathcal{S}$, получим уравнение Фридмана в РТГ:

$$H_g^2 = \frac{\kappa_g\rho_g}{6} - \frac{m^2}{12\xi^6}\frac{\kappa_g}{\kappa}(1 + 2\xi^6 - 3\xi^4). \tag{5.11}$$

Принимая $\kappa = \kappa_g = 16\pi G$, можно переписать уравнение (5.11) в виде

$$H_g^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho_g + \frac{\Lambda}{3}, \tag{5.12}$$

где

$$\Lambda(\xi) = -\frac{m^2}{2}\left(\frac{1}{2\xi^6} + 1 - \frac{3}{2\xi^2}\right). \tag{5.13}$$

За начальные данные можно выбрать ρ_g и H_g. Тогда $\Lambda(\xi)$ определяется из уравнения (5.12), и переменную ξ можно найти, решая бикубическое уравнение (5.13). В отличие от массивной гравитации с потенциалом дРГТ обсуждаемая теория допускает однородные изотропные космологические решения фридмановского типа. Это происходит благодаря тому, что гравитационное поле имеет здесь на одну степень свободы больше. В то же время эта степень свободы ведет себя как дух. В РТГ эффективная космологическая постоянная оказывается отрицательной, и поэтому любое расширение должно в будущем смениться сжатием. Вселенная ведет себя в этой модели циклически и не достигает сингулярности. Конечно, для объяснения наблюдаемого ускоренного расширения необходимо привлекать материю, которая на протяжении конечного промежутка времени ведет себя подобно квинтэссенции.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Решение задач космологии в рамках теории бигравитации является открытой проблемой и находится в стадии активного изучения [8–10, 28, 29, 54–58]. В данной работе мы стремились продемонстрировать красоту и мощь гамильтонова подхода в этой области исследований. Добавим также, что канонический формализм открывает прямую дорогу квантовой космологии в бигравитации.

Автор благодарен В. А. Петрову, Ю. Ф. Пирогову и Ю. М. Зиновьеву за их интерес к данной работе.

Приложение 1
ОБОЗНАЧЕНИЯ

Прямым вычислением следов матрицы X и ее степеней на основе уравнения (2.12) можно получить следующие формулы:

$$\operatorname{Tr}\mathsf{X} = -A + D, \tag{П.1}$$

$$\operatorname{Tr}\mathsf{X}^2 = A^2 - 2(BC) + \operatorname{Tr}D^2, \tag{П.2}$$

$$\operatorname{Tr}\mathsf{X}^3 = -A^3 + 3A(BC) - (BDC) - \operatorname{Tr}D^3. \tag{П.3}$$

После этого нетрудно выразить функцию $\tilde{U}$ и ее производные

$$V = \beta_0 e + \beta_1 e\left(x + \frac{y}{\varepsilon+1}\right) + \beta_2 e\left[x^2 - \operatorname{Tr} x^2 + 2\frac{xy - (px^2p)}{\varepsilon+1}\right] +$$

$$+ \beta_3 e\left[x^3 - 3x\operatorname{Tr} x^2 + 2\operatorname{Tr} x^3 + \frac{6(px^3p) - 6x(px^2p) - 3y\operatorname{Tr} x^2}{\varepsilon+1}\right],$$

$$V_i = -\beta_1 e(fp)^i + 2\beta_2 e\left[(fx^{\mathrm{T}}p)^i - (fp)^i x\right] +$$

$$+ 3\beta_3 e\left[2x(fx^{\mathrm{T}}p)^i + \operatorname{Tr} x^2 (fp)^i - 2(f(x^2)^{\mathrm{T}}p)^i\right] = -\mathbf{f}_{ia} C_{ab} p_b,$$

$$W = \beta_4 f + \beta_1 e\varepsilon + 2\beta_2 e\varepsilon\left(x - \frac{y}{\varepsilon(\varepsilon+1)}\right) +$$

$$+ \beta_3 e\left[x^3 - 3x\operatorname{Tr} x^2 + 2\operatorname{Tr} x^3 + \frac{6(px^3p) - 6x(px^2p) - 3z\operatorname{Tr} x^2}{\varepsilon+1}\right],$$

где

$$C_{ab} = e\left[\delta_{ab}(\beta_1 + 2\beta_2 x - 3\beta_3 \operatorname{Tr} x^2) - 2x_{ba}(\beta_2 + 3\beta_3 x) + 6\beta_3 x_{bc}x_{ca}\right]. \quad (\text{П}.4)$$

Выше были использованы следующие обозначения:

$$x_{ab} = \mathbf{f}_{ia}\,\mathbf{e}^i_b, \quad (\text{П}.5)$$

$$x = x_{aa}, \quad (\text{П}.6)$$

$$\operatorname{Tr} x^2 = x_{ab}x_{ba}, \quad (\text{П}.7)$$

$$\operatorname{Tr} x^3 = x_{ab}x_{bc}x_{ca}, \quad (\text{П}.8)$$

$$y_{ab} = p_a p_c x_{cb}, \quad (\text{П}.9)$$

$$y \equiv (pxp) = p_a x_{ab} p_b = y_{aa}, \quad (\text{П}.10)$$

$$(px^2p) = p_a x_{ab} x_{bc} p_c, \quad (\text{П}.11)$$

$$(px^3p) = p_a x_{ab} x_{bc} x_{cd} p_d, \quad (\text{П}.12)$$

$$(ufp) = u^i f_{ia} p^a, \quad (\text{П}.13)$$

$$(ufx^{\mathrm{T}}p) = u^i f_{ia} x_{ba} p_b, \quad (\text{П}.14)$$

$$(uf(x^2)^{\mathrm{T}}p) = u^i f_{ia} x_{ba} x_{cb} p_c. \quad (\text{П}.15)$$

Приложение 2
О ФЕНОМЕНОЛОГИИ БИГРАВИТАЦИИ

Вопрос о согласии теории с экспериментом для гравитации стоит особо, поскольку инструменты исследования здесь принципиально отличны от инструментов экспериментальной физики высоких энергий. Этой теме посвящены и монография [59], и обзоры [60–62], и новые публикации исследовательских коллабораций [63, 64]. Вызов для теоретиков, как уже было отмечено во введении, — это проблемы темной энергии и темной материи. Основными направлениями исследований являются здесь как изобретение новых полей материи (и, соответственно, новых элементарных частиц), так и изменение законов гравитации. Квалифицированный обзор всего объема работ явно превосходит возможности автора.

Обсуждаемая здесь теория биграватации, разумеется, является не единственной жизнеспособной модификацией ОТО. Имеются монография [65] и большие обзоры [66–70], в которых представлены различные варианты обобщения ОТО. Здесь и использование высших размерностей, и введение новых скалярных полей, и введение в лагранжиан различных инвариантов кривизны, и нелокальные теории, мотивированные теорией струн, и теории с нарушением лоренц-инвариантности и др. Так, на 14-м Семинаре Марселя Гроссмана, собравшем 1054 участника, самой перегруженной секцией была именно секция «Расширенные теории гравитации» с ее 109 докладами. Еще до изобретения потенциала дРГТ, позволившего избавиться от духов, обсуждались теории массивной гравитации [53, 71–74]. Многие считают биграватацию с потенциалом дРГТ более фундаментальной теорией, чем вышеперечисленные (см., например, [57]). Здесь используется единственная возможность построить взаимодействие безмассового и массивного полей спина 2. Кроме введения нескольких констант, в остальном теория является единственно определенной. В отличие от космологической постоянной масса гравитона не перенормируется при переходе от классической теории поля к квантовой.

Существуют подробные и квалифицированные обзоры как массивной гравитации, так и биграватации с потенциалом дРГТ, например [75–77]. Есть диссертации, специально посвященные описанию космологии на основе этих теорий, например [78]. Феноменология биграватации в целом не противоречит современным наблюдательным данным. В то же время предсказания разных вариантов теории могут существенно различаться в зависимости от того, каким образом построено взаимодействие гравитационных полей с полями материи, а также в зависимости от выбора констант в лагранжиане.

Понятие массы гравитона требует рассмотрения линейного приближения уравнений гравитационного поля на выбранном фоне, причем фоновая метрика должна иметь максимально возможную группу движений, т. е. задавать пространство постоянной (положительной, отрицательной или нулевой) кривизны.

В массивной гравитации динамическим является одно тензорное поле, которое на самых больших расстояниях в ньютоновском пределе дает гравитационный потенциал в виде потенциала Юкавы, соответствующего массе гравитона m. Оценки массы гравитона могут быть получены из разных соображений (см., например, [80–82]). Сводка различных оценок дана в обзоре [77]. Поскольку m обычно считается намного меньшим, чем масса любой из известных элементарных частиц, юкавское поведение становится заметным только на очень больших масштабах. На астрономически малых расстояниях, например, внутри Солнечной системы, в лоренц-инвариантных теориях массивной гравитации имеет место так называемая экранировка Вайнштейна [79], благодаря которой отклонения от ОТО ньютоновского потенциала источника массы M наблюдаются лишь для $r > r_V$, где $r_V = 1/m \sqrt[5]{\frac{M}{M_{\mathrm{Pl}}} \frac{m}{M_{\mathrm{Pl}}}}$ — так называемый радиус Вайнштейна для источника массы M.

В бигравитации дело обстоит иначе, и потенциал содержит суперпозицию ньютоновского и юкавского. Феноменология бигравитации допускает больше различных вариантов, поскольку можно использовать различные взаимодействия материи с тензорными полями, лишь частично описанные в настоящей работе. Здесь допустимы и сравнительно большие значения массы гравитона (см., например, [83, 84]).

Мы не рассматривали выше способы описания темной материи в рамках бигравитации. Упомянем лишь некоторые из них.

Например, было предложение считать, что темная материя порождается f-материей, которая минимально взаимодействует с метрикой $f_{\mu\nu}$, в то время как обычная материя (g-материя) минимально взаимодействует с метрикой $g_{\mu\nu}$. В линейном приближении на фоне пространства Минковского или пространства постоянной кривизны две различные линейные комбинации $f_{\mu\nu}$ и $g_{\mu\nu}$ представляют безмассовое и массивное поля спина 2 [36, 37].

Обсуждалась также возможность существования двух видов темной материи, взаимодействующих с двумя метриками бигравитации, а между собой — посредством векторного поля (диполярная темная материя) [85–87].

Третий вариант предполагает существование полей Стандартной модели как обычной материи, а роль темной материи играет массивное поле спина 2 [83, 84], причем гравитон может иметь большую массу (см., например, [83]) порядка 0,01 ГэВ.

В настоящее время теория бигравитации является одной из активно разрабатываемых модификаций ОТО, интересной как с чисто теоретической, так и с феноменологической точек зрения. При этом пока нельзя объективно отдать предпочтение какому-то из вариантов этой теории.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Boulware D., Deser S.* Can Gravitation have a Finite Range? // Phys. Rev. D. 1972. V. 6. P. 3368–3382.
2. *de Rham C., Gabadadze G.* Generalization of the Fierz–Pauli Action // Phys. Rev. D. 2010. V. 82. P. 044020.
3. *de Rham C., Gabadadze G., Tolley A. J.* Resummation of Massive Gravity // Phys. Rev. Lett. 2011. V. 106. P. 231101.

4. *Hassan S. F., Rosen R. A.* Bimetric Gravity from Ghost-Free Massive Gravity // JHEP. 2012. V. 02. P. 126.

5. *Hassan S. F., Rosen R. A.* Confirmation of the Secondary Constraint and Absence of Ghost in Massive Gravity and Bimetric Gravity // Ibid. V. 04. P. 123.

6. *Соловьев В. О.* Гамильтонов подход в релятивистской теории гравитации и в общей теории относительности // ЭЧАЯ. 1988. Т. 19. С. 1115–1153.

7. *Ryan M.* Hamiltonian Cosmology / Eds. Ehlers J., Hepp K., Weidenmueller H. A. Berlin; Heidelberg; New York: Springer-Verlag, 1972. Lecture Notes in Physics. V. 13.

8. *Comelli D. et al.* Cosmology of Bigravity with Doubly Coupled Matter // JCAP. 2015. V. 04. P. 026.

9. *Gumrukcuoglu A. E. et al.* Cosmology in Bimetric Theory with an Effective Composite Coupling to Matter // Ibid. P. 008.

10. *Akrami Y. et al.* Bimetric Gravity is Cosmologically Viable // Phys. Lett. B. 2015. V. 748. P. 37–44.

11. *Соловьев В. О., Чичикина М. В.* Бигравитация в гамильтоновом формализме Кухаржа. Общий случай // ТМФ. 2013. Т. 176. С. 1163–1175.

12. *Soloviev V. O., Tchichikina M. V.* Bigravity in Kuchař's Hamiltonian Formalism: The Special Case // Phys. Rev. D. 2013. V. 88. P. 084026.

13. *Comelli D., Nesti F., Pilo L.* Weak Massive Gravity // Phys. Rev. D. 2013. V. 87. P. 124021; Massive Gravity: a General Analysis // JHEP. 2013. V. 07. P. 161.

14. *Соловьев В. О.* Бигравитация в гамильтоновом формализме. Тетрадный подход // ТМФ. 2015. Т. 182. С. 294–307.

15. *Soloviev V. O.* Bigravity in Tetrad Hamiltonian Formalism and Matter Couplings. arXiv:1410.0048. 2014.

16. *Kluson J.* Hamiltonian Formalism of Bimetric Gravity in Vierbein Formulation // Eur. Phys. J. 2014. V. 74. P. 2985.

17. *Golovnev A.* On the Hamiltonian Analysis of Non-Linear Massive Gravity // Phys. Lett. B. 2012. V. 707. P. 404–408.

18. *Deser S. et al.* Covariant Constraints for Generic Massive Gravity and Analysis of Its Characteristics // Phys. Rev. D. 2014. V. 90. P. 104043.

19. *Kuchař K.* Geometry of Hyperspace. I // J. Math. Phys. 1976. V. 17. P. 777–791.

20. *Kuchař K.* Kinematics of Tensor Fields in Hyperspace. II // Ibid. P. 792–800.

21. *Kuchař K.* Dynamics of Tensor Fields in Hyperspace. III // Ibid. P. 801–820.

22. *Kuchař K.* Geometrodynamics with Tensor Sources. IV // J. Math. Phys. 1977. V. 18. P. 1589–1597.

23. *Dirac P. A. M.* Lectures on Quantum Mechanics. New York: Yeshiva Univ., 1964.

24. *Fairlie D., Leznov A.* General Solutions of the Monge–Ampère Equation in n-Dimensional Space // J. Geom. Phys. 1995. V. 16. P. 385–390.

25. *Deser S., Isham C. J.* // Phys. Rev. D. 1976. V. 14. P. 2505–2510; *Nelson J. E., Teitelboim C.* // Ann. Phys. 1978. V. 116. P. 86–104; *Henneaux M.* // Gen. Rel. Grav. 1978. V. 9. P. 1031–1045.

26. *Alexandrov S., Krasnov K., Speziale S.* Chiral Description of Ghost-Free Massive Gravity // JHEP. 2013. V. 1306. P. 068.

27. *Alexandrov S.* Canonical Structure of Tetrad Bimetric Gravity // Gen. Rel. Grav. 2014. V. 46. P. 1639.

28. *Sakakihara Y., Soda J.* Primordial Gravitational Waves in Bimetric Gravity // JCAP. 2015. V. 09. P. 015.

29. *Sakakihara Y., Tanaka T.* Primordial Fluctuations from Inflation in dRGT Bimetric Theory of Gravity. arXiv:1605.05790. 2016.

30. *Holm D. D.* Hamiltonian Formalism for General-Relativistic Adiabatic Fluids // Physica D. 1985. V. 17. P. 1.

31. *Soloviev V. O.* Boundary Values as Hamiltonian Variables. III. Ideal Fluid with Free Surface // J. Math. Phys. 2002. V. 43. P. 3655.

32. *Volkov M. S.* Cosmological Solutions with Massive Gravitons in the Bigravity Theory // JHEP. 2012. V. 01. P. 035.

33. *von Strauss M. et al.* Cosmological Solutions in Bimetric Gravity and Their Observational Tests // JCAP. 2012. V. 03. P. 042.

34. *Comelli D. et al.* FRW Cosmology in Ghost Free Massive Gravity // JHEP. 2012. V. 03. P. 067.

35. *Akrami Ya., Koivisto T. S., Sandstad M.* Accelerated Expansion from Ghost-Free Bigravity: A Statistical Analysis with Improved Generality // JHEP. 2013. V. 03. P. 099.

36. *Aoki K., Maeda K.* Cosmology in Ghost-Free Bigravity Theory with Twin Matter Fluids: The Origin of “Dark Matter”. arXiv:1312.7040. 2013.

37. *Aoki K., Maeda K.* Dark Matter in Ghost-Free Bigravity Theory: From a Galaxy Scale to the Universe. arXiv:1409.0202. 2014.

38. *D’Amico G. et al.* Massive Cosmologies // Phys. Rev. D. 2011. V. 84. P. 124046.

39. *Gumrukcuoglu A. E., Lin C., Mukohyama S.* Open FRW Universes and Self-Acceleration from Nonlinear Massive Gravity // JCAP. 2011. V. 11. P. 030.

40. *Akrami Ya. et al.* Bimetric Gravity Doubly Coupled to Matter: Theory and Cosmological Implications // JCAP. 2013. V. 10. P. 046.

41. *Akrami Ya., Koivisto T. S., Solomon A. R.* The Nature of Spacetime in Bigravity: Two Metrics or None? // Gen. Rel. Grav. 2015. V. 47. P. 1838.

42. *Yamashita Y., De Felice A., Tanaka T.* Appearance of Boulware–Deser Ghost in Bigravity with Doubly Coupled Matter // Intern. J. Mod. Phys. D. 2014. V. 23. P. 1443003.

43. *de Rham C., Heisenberg L., Ribeiro R. H.* On Couplings to Matter in Massive (Bi-)Gravity // Class. Quant. Grav. 2015. V. 32. P. 035022.

44. *de Rham C., Heisenberg L., Ribeiro R. H.* Ghosts and Matter Couplings in Massive (Bi-and Multi-)Gravity // Phys. Rev. D. 2014. V. 90. P. 124042.

45. *Noller J., Melville S.* The Coupling to Matter in Massive, Bi- and Multi-Gravity // JCAP. 2016. V. 01. P. 023.

46. *Heisenberg L.* Quantum Corrections in Massive Bigravity and New Effective Composite Metrics // Class. Quant. Grav. 2015. V. 32. P. 105011.

47. *Hinterbichler K., Rosen R. A.* A Note on Ghost-Free Matter Couplings in Massive Gravity and Multi-Gravity // Phys. Rev. D. 2015. V. 92. P. 024030.

48. *de Rham C., Tolley A. J.* Vielbein to the Rescue? // Ibid. P. 024024.

49. *Enander J. et al.* Cosmic Expansion Histories in Massive Bigravity with Symmetric Matter Coupling // JCAP. 2015. V. 01. P. 006.

50. *Lagos M., Noller J.* New Massive Bigravity Cosmologies with Double Matter Coupling // JCAP. 2016. V. 01. P. 023.

51. *Solomon A. R. et al.* Cosmological Viability of Massive Gravity with Generalized Matter Coupling // JCAP. 2015. V. 04. P. 027.

52. *Герштейн С. С., Логунов А. А., Мествиришвили М. А.* Верхний предел массы гравитона // Докл. РАН. 1998. Т. 360, вып. 3. С. 332–334.

53. *Логунов А. А.* Релятивистская теория гравитации. М.: Наука, 2015.

54. *Heisenberg L., Refregier A.* Cosmology in Massive Gravity with Effective Composite Metric. arXiv:1604.07306. 2016.

55. *Heisenberg L., Refregier A.* Cosmology in Doubly Coupled Massive Gravity: Constraints from SNIa, BAO and CMB. arXiv:1604.07680. 2016.

56. *Könnig F. et al.* A Spectre is Haunting the Cosmos: Quantum Stability of Massive Gravity with Ghosts. arXiv:1605.08757. 2016.

57. *Brax P., Davis A.-Ch., Noller J.* Dark Energy and Doubly Coupled Bigravity. arXiv:1606.05590. 2016.

58. *Gao X., Heisenberg L.* Doubly Coupled Matter Fields in Massive Bigravity. arXiv:1606.06141. 2016.

59. *Уилл К.* Теория и эксперимент в гравитационной физике. М.: Энергоатомиздат, 1985.

60. *Will C. M.* The Confrontation between General Relativity and Experiment // Living Rev. Rel. 2014. V. 17. P. 4–117.

61. *Murata J., Tanaka S.* A Review of Short-Range Gravity Experiments in the LHC Era // Class. Quant. Grav. 2015. V. 32. P. 033001–033032.

62. *Baker T., Psaltis D., Skordis C.* Linking Tests of Gravity on All Scales: from the Strong-Field Regime to Cosmology // Astrophys. J. 2015. V. 802, No. 63. P. 1–19.

63. *Abbott B. P. et al. (LIGO Scientific Collab. and Virgo Collab.).* GW150914: First Results from the Search for Binary Black Hole Coalescence with Advanced LIGO // Phys. Rev. D. 2016. V. 93. P. 122003.

64. *Abbott B. P. et al. (LIGO Scientific Collab. and Virgo Collab.).* Observing Gravitational-Wave Transient GW150914 with Minimal Assumptions // Phys. Rev. D. 2016. V. 93. P. 122004.

65. *Capozziello S., Faraoni V.* Beyond Einstein Gravity: a Survey of Gravitational Theories for Cosmology and Astrophysics. Springer, 2011. Fundamental Theories of Physics. Book 170.

66. *Clifton T. et al.* Modified Gravity and Cosmology // Phys. Rep. 2012. V. 513, No. 1. P. 1–189.

67. *Sami M., Myrzakulov R.* Late Time Cosmic Acceleration: ABCD of Dark Energy and Modified Theories of Gravity. arXiv:1309.4188. 2013.

68. *Joyce A. et al.* Beyond the Cosmological Standard Model // Phys. Rep. 2014. V. 568. P. 1–98.

69. *Bull P. et al.* Beyond ΛCDM: Problems, Solutions and the Road Ahead // Phys. Dark Univ. 2016. V. 12. P. 56–99; arXiv:1512.05356. 2015.

70. *Koyama K.* Cosmological Tests of Modified Gravity // Rep. Prog. Phys. 2016. V. 79, No. 4. P. 046902.

71. *Рубаков В. А., Тиняков П. Г.* Модификация гравитации на больших расстояниях и массивный гравитон // УФН. 2008. Т. 178, № 8. С. 785–822.

72. *Blas D.* Aspects of Infrared Modifications of Gravity. arXiv:0809.3744. 2008.

73. *Bebronne M. V.* Theoretical and Phenomenological Aspects of Theories with Massive Gravitons. arXiv:0910.4066. 2009.

74. *Hinterbichler K.* Theoretical Aspects of Massive Gravity // Rev. Mod. Phys. 2012. V. 84. P. 671–710.

75. *de Rham C.* Massive Gravity // Living Rev. Rel. 2014. V. 17. P. 7.

76. *Schmidt-May A., von Strauss M.* Recent Developments in Bimetric Theory. arXiv:1512.00021. 2015.

77. *de Rham C. et al.* Graviton Mass Bounds. arXiv:1606.08462. 2016.

78. *Solomon A.* Cosmology beyond Einstein. arXiv:1508.06859. 2015.

79.

80. *Deser S.* Massive to Gauge Field Reduction and Gravitational Wave Zone Information. arXiv:1604.04015. 2016.

81. *Zakharov A. F. et al.* Constraining the Range of Yukawa Gravity Interaction from S2 Star Orbits II: Bounds on Graviton Mass. arXiv:1605.00913. 2016.

82. *Ali A. F., Das S.* Stringent Theoretical and Experimental Bounds on Graviton Mass. arXiv:1605.05928. 2016;
Vainshtein A. I. To the Problem of Nonvanishing Gravitation Mass // Phys. Lett. B. 1972. V. 39. P. 393–394.

83. *Aoki K., Shinji Mukohyama S.* Bigravitons as Dark Matter and Gravitational Waves. arXiv:1604.06704. 2016.

84. *Babichev E. et al.* Gravitational Origin of Dark Matter. arXiv:1604.08564. 2016.

85. *Blanchet L., Heisenberg L.* Dark Matter via Massive (Bi-)Gravity // Phys. Rev. D. 2015. V. 91. P. 103518.

86. *Blanchet L., Heisenberg L.* Dipolar Dark Matter. arXiv:1505.05146. 2015.

87. *Bernard L., Blanchet L., Heisenberg L.* Bimetric Gravity and Dark Matter. arXiv:1507.02802. 2015.