

**В. О. Соловьев**

## Уравнение Фридмана: вчера, сегодня, завтра

*В связи со столетием общей теории относительности (ОТО) кратко излагается история открытия А. Фридманом в 1922 г. уравнения эволюции Вселенной. Подчеркивается, что им впервые в космологической задаче был использован геометродинамический подход к ОТО и обнаружено уравнение гамильтоновой связи. Рассмотрены также некоторые современные обобщения ОТО и соответствующие модификации уравнения Фридмана.*

*Ключевые слова: общая теория относительности, космология, гамильтонов формализм, история физики, теория струн, массивная гравитация.*

### Об авторах

**Соловьев Владимир Олегович** — доктор физико-математических наук, профессор кафедры математики и естественных наук филиала «Протвино» Государственного университета «Дубна»; старший научный сотрудник отдела теоретической физики ФГБУ «Государственный научный центр Российской Федерации — Институт физики высоких энергий» Национальный исследовательский центр «Курчатовский институт».

В 2015 г. исполнилось 100 лет общей теории относительности (ОТО). Помимо А. Эйнштейна существенный вклад в создание ОТО внесли математики М. Гроссман и Д. Гильберт. На основе ОТО впервые была построена динамическая модель Вселенной. Это стало самым сильным предсказанием теории, многократно подтвердившимся наблюдениями. Открытое А. Фридманом в 1922 г. уравнение эволюции Вселенной вопреки первоначальному недоверию многих, включая и самого Эйнштейна, стало фундаментом современной космологии. История открытия, изменившего мировоззрение человечества подобно тому, как его изменила идея о вращении Земли вокруг Солнца, интересна и поучительна.

Статья Фридмана «О кривизне пространства» была закончена 29 мая 1922 г. и с сопроводительным письмом от 3 июня была отправлена в Лейден П. Эренфесту. И письмо, и рукопись, написанные по-русски, сохранились, находятся в архиве Лейденского университета и доступны пользователям интернета [2]. П. Эренфест, ученик Л. Больцмана, был женат на выпускнице Высших бестужевских курсов по физико-математическому направлению Татьяна Афанасьевой, с которой познакомился в Геттингене, с 1907 по 1912 гг. молодые су-

руги жили в Санкт-Петербурге. У себя на дому Эренфест организовал семинар по теоретической физике, посещавшийся многими будущими крупными физиками и математиками, в том числе А. Фридманом и его ближайшим другом Я. Тамаркиным. Перевод работы Фридмана на немецкий язык был выполнен в России, вероятно при участии будущего академика В.А. Фока, и представлен Эренфестом в ведущий физический журнал “*Zeitschrift fur Physik*” [12]. Позднее эта работа вышла на русском языке [3] и с тех пор многократно переиздавалась [4; 5].

Пятью годами ранее космологическая задача уже рассматривалась, сначала Эйнштейном, а затем голландским астрономом де Ситтером. Важно подчеркнуть, что подход Эйнштейна был характерен для него и использовал больше физическую интуицию, чем математику. Эйнштейн мысленно построил свою картину Вселенной и лишь после этого стал проверять, удовлетворяет ли она уравнениям ОТО. Для преодоления парадокса космологии Ньютона, приводившей в случае бесконечного мира однородно заполненного материей к бесконечному гравитационному потенциалу, Эйнштейн предположил, что пространство конечно и является простейшим из возможных — 3-мерной сферой. Однако такое решение не удовлетворяло первоначальным уравнениям ОТО. Тогда Эйнштейн изменил свою совсем ещё юную теорию и ввел в неё силу гравитаци-

онного отталкивания, т.е. космологическую постоянную. Вслед за Эйнштейном другое решение предложил де Ситтер, причём теперь постоянной кривизной обладало уже пространство — время, т.е. 4-мерное многообразие. И у Эйнштейна, и у де Ситтера ни одна из компонент метрики не зависела от времени.

В отличие от Эйнштейна Фридман не пытался угадать вид решения, а искал его как математик. Он принял те же физические предположения об однородности распределения материи и о её неподвижности, что и его предшественники. Это подразумевало использование сопутствующей системы координат и дополнялось выбором ортогонального по отношению к пространству направления времени. Фридман заметил, что величина, которая была названа Эйнштейном радиусом мира, может зависеть от времени. Были получены два уравнения, определяющие эту зависимость. В случае, когда материя ведёт себя как пыль, т.е. не оказывает давления, эти уравнения имеют следующий вид

$$\frac{3R'^2}{R^2} + \frac{3}{R^2} - \lambda = \kappa\rho,$$

$$\frac{R'^2}{R^2} + \frac{2RR''}{R^2} + \frac{1}{R^2} - \lambda = 0.$$

Нетрудно переписать уравнения Фридмана в виде двух уравнений классической механики материальной точки, одно из них представляет собой второй закон Ньютона, другое — закон сохранения механической энергии:

$$R'' = \frac{-GM}{R^2} + \omega^2 R,$$

$$\frac{R'^2}{2} - \frac{GM}{R} - \frac{\omega^2 R^2}{2} = \frac{-1}{2},$$

где

$$\omega^2 = \frac{\lambda}{3} \quad M = \rho V = \rho 4/3\pi R^3 \quad \kappa = 16\pi G.$$

В этой задаче вся материя Вселенной создаёт гравитационный потенциал, а положительная космологическая постоянная создаёт потенциал силы упругости Гука, но с обратным знаком. Отрицательная космологическая постоянная создавала бы обычную силу упругости (притяжение). Изюминкой, отличающей задачу космологии Фридмана

от ньютоновской задачи, является то, что величина, соответствующая полной механической энергии, дискретна и может принимать только три значения. Они соответствуют пространству постоянной положительной кривизны, плоскому пространству и пространству постоянной отрицательной кривизны. Фридман в первой статье [12] рассмотрел случай положительной кривизны, во второй [13] — отрицательной. Случай плоского пространства им специально не обсуждался, хотя для него был вычислен период мира, анализ этого случая проще, чем двух рассмотренных. Статическая Вселенная Эйнштейна соответствует неподвижно висящему в центральном поле пробному телу, уравновешенному силой гравитационного притяжения всего вещества и силой упругого отталкивания, линейно возрастающей при удалении от центра (космологической постоянной). Такое равновесие, очевидно, неустойчиво и поэтому невозможно в реальном мире. Вселенная де Ситтера оказывается пустой, т.е. лишённой материи и поэтому также не подходит для описания наблюдаемого мира. Не исключено, конечно, что вселенная де Ситтера пригодна для описания очень ранней или очень поздней космологии.

Фридман показал на основании полученных им уравнений, что для реальной Вселенной возможны три сценария. В приведенной нами механической трактовке они отличаются тем, пересекает ли уровень полной энергии график потенциальной энергии и также тем, каков начальный радиус мира. Если пересечения нет, то имеет место «монотонный мир первого рода», т.е. Вселенная рождается в сингулярности и бесконечно расширяется. Если есть пересечение, то возможен «монотонный мир второго рода», т.е. бесконечное расширение, начинающееся с нулевой скорости и с конечного радиуса мира, или «периодический мир», состоящий из циклов рождения, расширения до конечного радиуса и сжатия в сингулярность. Наблюдательные данные в то время не давали возможности сделать выбор между сценариями. Вскоре после смерти Фридмана (1925) анализ астрономических данных подтвердил расширение Вселенной. Намного позднее открытием реликтового излучения была подтверждена картина Большого Взрыва, исключая «монотонный мир второго рода». Наконец, открытие ускоренного рас-

ширения с большой вероятностью исключило периодический сценарий, и сейчас мы считаем наиболее вероятным сценарий монотонного мира первого рода.

Фридман первым стал изучать нестационарные решения ОТО вне рамок теории возмущений. Он обнаружил, что 00-компонента уравнений Гильберта — Эйнштейна не содержит вторых производных по времени, из чего следует, что эта компонента является уравнением связи. На уровне однородной и изотропной космологии Фридман продемонстрировал это уже в 1922 г. Только в 1950-х гг. математики занялись изучением задачи Коши в ОТО. Как вспоминала И. Шоке-Брюа, ей так и не удалось заинтересовать этим вопросом Эйнштейна. Структура связей была окончательно выявлена и исследована при построении гамильтонова формализма ОТО Дираком [11], а также Арновитом, Дезером и Мизнером [6]. Теперь мы знаем, что не только в случае пространства постоянной кривизны, но и в общем случае 00-компонента уравнений ОТО является гамильтоновой связью. Уилер подчеркивал, что в этом уравнении содержится целиком вся теория. Вычислением скобок Пуассона из гамильтоновой связи могут быть получены ещё три уравнения связи ( $0i$ -компоненты уравнений Гильберта — Эйнштейна) и 12 уравнений первого порядка по времени, комбинируя которые мы приходим к оставшимся 6 уравнениям ОТО ( $ij$ -компоненты). Каноническое квантование ОТО основано на уравнении Уилера — де Витта [10], которое получается квантованием гамильтоновой связи. На мини-суперпространстве квантуется, фактически, уравнение Фридмана.

В настоящее время главным вызовом для космологов являются проблемы тёмной энергии и тёмной материи, в связи с чем стали весьма популярными модифицированные теории гравитации. Одним из направлений модификации является введение массы гравитона. Этим направлением в течение 30 лет занимался А.А. Логунов с сотрудниками. Предложенная этой группой релятивистская теория гравитации (РТГ) не содержит свободных параметров помимо массы гравитона. Динамика Вселенной и здесь описывается уравнением Фридмана, только космологический член перестаёт быть постоянным и становится функцией от масштабного фактора. Эта функция при всех значениях аргу-

мента оказывается отрицательной. Для космологии РТГ предсказывает циклическую эволюцию, критическую плотность материи и плоскую геометрию пространства [1]. Однако в РТГ гравитационное поле имеет шесть степеней свободы, что означает присутствие духа Бульвара — Дезера [7].

Недавно возникла другая теория массивной гравитации, число степеней свободы в которой на единицу меньше и дух отсутствует. Предложенный де Рам — Габададзе — Толи [9] потенциал взаимодействия двух метрик содержит несколько свободных параметров, помимо массы гравитона. На фоне плоской метрики Минковского такая теория не позволяет получить космологию Фридмана. Одним из путей обхода этой трудности является постулат, что материя минимально взаимодействует с комбинацией из двух метрик, называемой эффективной метрикой. Однако в таком случае дух Бульвара — Дезера возрождается снова, правда, лишь при энергиях взаимодействия, превышающих обрезание. Другой путь заключается в переходе к теории бигравитации, где динамическими являются обе метрики, ситуация с духами при этом остается прежней [14].

Число вариантов модификации ОТО весьма велико. Но так или иначе динамика Вселенной в них описывается уравнением фридмановского типа. Весьма радикальным изменением стандартной космологии является картина идеального газа суперструн [8]. Если пространство — время содержит компактифицированные измерения, то струнные моды включают не только стоячие волны, но и моды наматывания, которые ведут себя при уменьшении радиуса совсем иначе. Имеет место новая симметрия — T-дуальность. Однако квадрат параметра Хаббла, входящий в уравнение Фридмана, оказывается инвариантным относительно преобразований T-дуальности, поэтому уравнения струнной космологии сохраняют определенную преемственность.

## Библиографический список

1. Герштейн, С. С. Верхний предел массы гравитона / С.С. Герштейн, А.А. Логунов, М.А. Мествиришвили // ДАН. — 1998. — Т. 360, вып. 3. — С. 332—334.
2. Письма и рукописи статей Фридмана в архиве Пауля Эренфеста. — Электрон. дан. — URL: [http://www.lorentz.leidenuniv.nl/history/Friedmann\\_archive](http://www.lorentz.leidenuniv.nl/history/Friedmann_archive) (дата обращения: 13.01.2016 г.).

3. Фридман, А. А. Журн. Русск. физ.-хим. общ-ва. — 1924. — Т. 56, вып. 1. — С. 59.
4. Фридман, А. А. // УФН. — 1963. — Т. 80, вып. 3. — С. 439—446; 447—452. Специальный выпуск, посвященный памяти А.А. Фридмана (к 75-летию со дня рождения). — Электрон. дан. — URL: <http://ufn.ru/ru/articles/1963/7/> (дата обращения: 13.01.2016 г.).
5. Фридман, А. А. Собрание трудов. — Москва : Наука, 1966.
6. Arnowitt, R. In Gravitation, an Introduction to Current Research / R. Arnowitt, S. Deser, Ch.W. Misner ; edited by L. Witten. — New York, 1963.
7. Boulware, D. Can gravitation have a finite range? / D. Boulware, S. Deser // Phys. Rev. D. — 1972. — V. 6, Iss. 12. — P. 3368—3382.
8. Brandenberger, R. H. String gas cosmology after Planck // Cornell University Library e-print arxiv:1505.02381. — Электрон. дан. — URL: <http://arxiv.org/abs/1505.02381> (дата обращения: 14.01.2016 г.).
9. Rham, De C. Resummation of massive gravity / C. De Rham, G. Gabadadze, A.J. Tolley // Phys. Rev. Lett. — 2011. — V. 106, Article ID 231101.
10. De Witt, B. S. Quantum Theory of Gravity. I. The Canonical Theory // Phys. Rev. — 1967. — V. 160, iss. 5. — P. 1113—1148.
11. Dirac, P. A. M. Fixation of Coordinates in the Hamiltonian Theory of Gravitation // Phys. Rev. — 1959. — V. 114, iss. 3. — P. 924—930.
12. Friedman, A. Über die Krümmung des Raumes // Z. Phys. — 1922. — V. 10, iss. 1. — P. 377—386.
13. Friedmann, A. Über die Möglichkeit einer Welt mit konstanter negativer Krümmung des Raumes // Z. Phys. — V. 21, iss. 1. — P. 326—332.
14. Soloviev, V. O. Hamiltonian cosmology in bigravity and massive gravity // Cornell University Library e-print arxiv: 1505.00840. — Электрон. дан. — URL: <http://arxiv.org/abs/1505.00840> (дата обращения: 14.01.2016 г.).

---

*Поступила в редакцию*  
25.03.2016