УДК 519.21

В. С. Дацко

Об уравнении эволюции систем

Продемонстрировано, что описание системы – линейного осциллятора в режиме свободных колебаний – в настоящее время внутренне противоречиво. Использование уравнения движения системы в представлении Лагранжа позволяет определить размерность этой системы, как равную трём. Это ведёт к изменению фазового портрета системы. Показано, что $D \neq const$ и $div(\dot{x}) \neq 0$.

Ключевые слова: фазовый объём, теорема Лиувилля, осциллятор, уравнение движения, представление Лагранжа.

Об авторах

Дацко Виктор Сергеевич — кандидат физико-математических наук, доцент кафедры математики и естественных наук филиала «Протвино» Государственного университета «Дубна».

Уравнение $\frac{dD}{dt} = D \cdot \sum_i \frac{\partial \dot{x}}{\partial x} = Ddiv(\dot{x})$ применяется во многих разделах физики (см., например, [4]). Здесь D — детерминант якобиана перехода от одного состояния системы к другому, а $\dot{x}$ — «фазовый поток». В приложении I, представляющего собой цитату из учебника И.И. Ольховского, показано как именно используется детерминант для перехода от системы к системе. Однако применение уравнения недостаточно широко. Ограниченность его применения связана с недоразумением в виде вывода о том, что для гамильтоновых систем оно вырождается в утверждение $div(\dot{x})$=0 и как следствие D = const («теорема Лиувилля», далее ТЛ). Таким образом, оно тривиально, а потому, несколько упрощая рассуждения, его применение не может привести к каким– либо новым результатам.

На самом деле вывод, что для гамильтоновых систем D = const, ошибочен, что подтверждается и экспериментально, и теоретически.

Из ТЛ следует возвратная теорема Пуанкаре, в соответствии с которой капля чернил, растворившихся в воде непременно должна снова собраться в каплю! Миллиарды наблюдений за многие столетия опровергают этот вывод.

В статистической физике введена характеристика системы — энтропия. Она определяется как $S=klnP$, где S — энтропия; k — константа; P — вероятность. $P=\int f(x)dx$ или $dP= f(x)dx$, где $f(x)$ — функция плотности распределения; dx — интервал области системы, вероятность попасть в который равна dP, т.е. dx — дифференциально малая область фазового объёма системы. Величины S и x связаны прямо пропорциональной зависимостью, однако S может только возрастать, а x — (в соответствии с ТЛ) только сохраняться…

В [2] показано, что в действительности в противоречии с ТЛ, для широко использующейся системы — линейного осциллятора, $D \neq$ const.

Это означает, что выражение $\dot{D}=Ddiv(\dot{x})$ вовсе не является тривиальным и, как показано в [2], может использоваться как фундаментальный закон, подтверждая несостоятельность ТЛ. Для этого достаточно показать, что хоть одна система противоречит этой «теореме». В качестве таковой выбрана широко распространённая модельная система — линейный осциллятор в режиме свободных колебаний (далее — осциллятор). Эта система как наиболее простая традиционно используется для доказательства истинности ТЛ, основывающегося на вычислении дивергенции фазового потока осциллятора $\left(\sum_i \frac{\partial \dot{x}_i}{\partial x_i}\right)$, которая, якобы, равна нулю, а поэтому $dD/dt = D \cdot \sum_i \frac{\partial \dot{x}_i}{\partial x_i}$=0, откуда следует, что D = const, и, следовательно, фазовый объём системы сохраняется. В работе [5] приведено простое доказательство, подразумевающее, что размерность системы равна 2.

$$\sum_{i=1}^{2} \frac{\partial \dot{x}_i}{\partial x_i} = \left(\frac{\partial \dot{x}}{\partial x} + \frac{\partial \dot{p}}{\partial p}\right) = \left(\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial H}{\partial p} - \frac{\partial}{\partial p}\frac{\partial H}{\partial x}\right) \equiv 0.$$

Вычисления выполняются с использованием уравнений Гамильтона $\frac{\partial H}{\partial x} = -\frac{\partial p}{\partial t}$, $\frac{\partial H}{\partial p} = \frac{\partial x}{\partial t}$, т.е. молчаливо предполагается, что число фазовых переменных для данной системы равно двум (обобщенные переменные x и p; заметим, осциллятор линейный (т.е. одномерный! — подробнее см. [2])).

Внимательное изучение вычислений и их результатов позволяют усомниться в справедливости традиционных выводов.

Определив систему как совокупность объектов и связей между ними, выделенных из среды на определённое время и с определённой целью, следует считать осциллятор системой с соответствующим фазовым пространством.

Обычно (например, в механике) фазовым пространством называется воображаемое пространство, в частном случае координатными осями которого являются обобщённые координаты q и обобщённые импульсы p. Разумеется, именно такое задание координат необязательно. Оно определяется исследователем и преследует цели наилучшего описания системы. Например, для описания состояния моля идеального газа обычно используют фазовое пространство с координатами P, V, T (P — давление, V — объём, T — температура).

Состояние системы в данный момент времени изображается в фазовом пространстве фазовой точкой (а для непрерывных величин — бесконечно малой окрестностью точки).

Совокупность точек может образовывать фазовую траекторию. Совокупность фазовых точек или траекторий составляет фазовое пространство системы.

Изменение состояния системы (изменение фаз системы, т.е. фазовых координат системы, а значит, фазовых точек — откуда, собственно, термин — фазовое пространство), например в механике, связано с некоторыми уравнениями движения, т.е. задана определённая функциональная зависимость между координатами.

Так, для осциллятора в режиме свободных колебаний уравнение движения можно записать в виде:

$$F = -kx \qquad \Rightarrow \qquad d^2x/dt^2 + \omega_0^2 x = 0.$$

Его решение:

$$x = x_0 \cos \omega_0 t + (v_0/\omega_0) \sin \omega_0 t \rightarrow$$
$$\rightarrow x = c \cdot \cos(\omega_0 t + \varphi).$$

Не вызывает сомнения, запись этого же решения в общем виде как:

$$x = x(x_0, v_0, t),$$

что является формально точной записью уравнения движения системы в представлении Лагранжа (см. [3]), а фазовую траекторию (фазовый портрет) обычно (в действительности фазовая траектория другая) обычно получают в виде (см. [1; 2]):

$$x^2 + v^2/\omega_0^2 = c^2,$$

т.е. в виде эллипса, идентичного приведённому на рис. 1.

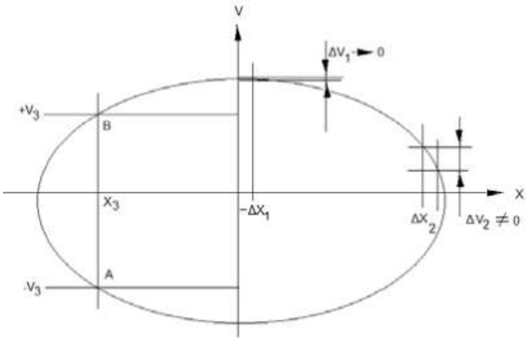


Рис. 1. Традиционный фазовый портрет осциллятора: строчной буквой v обозначена одна из фазовых переменных системы, в отличие от прописной буквы V, которой обозначается фазовый объём

Действительно, поскольку

$$v = v_0 \cos \omega_0 t - x_0 \omega_0 \sin \omega_0 t \rightarrow$$
$$\rightarrow x = c \cdot \omega_0 \cdot \sin(\omega_0 t + \varphi),$$

то после несложных преобразований получаем уравнение эллипса.

Сечению фазового портрета (очевидно, что фазовое пространство предполагается двумерным с переменными x и v) прямой, проходящей через точку $-x_3$ фазовой переменной x, соответствуют две точки сопряжённой координаты v: A и B, с координатами по оси ординат $-v_3$ и $+v_3$. Таким образом, из всей фазовой плоскости данной координате x_3 соответствуют только две точки, остальные точки не принадлежат фазовому портрету, т.к. не удовлетворяют уравнению эллипса. Следовательно, фазовым портретом осциллятора является замкнутая кривая — эллипс, а фазовым объёмом системы является длина этой кривой.

Одному и тому же интервалу Δx на разных участках оси абсцисс соответствуют отличающиеся по длине интервалы по оси ординат.

На рис. 1 $\Delta x_1 = \Delta x_2$ по построению, однако очевидно, что $\Delta v_1 \neq \Delta v_2$! Следовательно,
$\Delta V_1 = \sqrt{\Delta x_1^2 + \Delta v_1^2} \cong \Delta x_1$, а $\Delta V_2 = \sqrt{\Delta x_2^2 + \Delta v_2^2}$
и ΔV_2 отчётливо превышает ΔV_1 (более, чем в 2 раза!). И это полностью противоречит выводу о сохранении фазового объёма данной системы (даже в течение одного периода). Таким образом, традиционная модель эволюции осциллятора внутренне противоречива, при движении по эллипсу фазовый объём, соответствующий разным состояниям системы, меняется, в отличие от распространённого мнения.

Как следует из приведённого выше общего вида уравнения движения системы в представлении Лагранжа (см. также [2]), размерность системы равна 3, следовательно, представление $div(\dot{x})$ в виде суммы состоит из трёх слагаемых, и фазовое пространство представляет собой трёхмерную фигуру. Проекция её на плоскость OXV — эллипс (см. рис. 1), а по оси аппликат координата (время) определяется периодом колебаний осциллятора. То есть, когда точка на плоскости OXV проходит путь равный длине эллипса ℓ, проходит время равное периоду колебаний осциллятора T. Учитывая, что в режиме свободных колебаний частота осциллятора не меняется ($\omega_0 = \text{const}$), траектория движения точки представляет собой пространственную винтовую линию, обвивающую воображаемый прямой эллиптический цилиндр. Следовательно, развёртка фазовой траектории (рис. 2) представляет собой прямую линию, которая наклонена к горизонтальной оси под постоянным углом α.

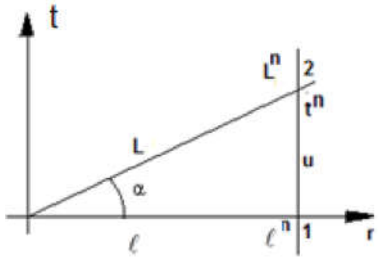


Рис. 2. Развёртка эллиптической спирали:

r – ось расстояний (длин эллипса) в развёртке; t – ось аппликат (время) в развёртке; L – развёртка винтовой линии, путь проходимый точкой по спирали; ℓ – развёртка эллипса; α – угол между винтовой линией и плоскостью OXV (эллипсом); t_n – длина перпендикуляра u между точками $L^n(x_n, v_n, t_n)$ и ℓ^n (x_n, v_n)

Перпендикуляр u к оси r пересечёт наклонную прямую, образуя прямоугольный треугольник, из которого можно найти длину перпендикуляра u до точки пересечения:

$$u^2 = L^2 - \ell^2.$$

Поскольку $\alpha = \text{const}$, то соотношение $u^2 = L^2 - \ell^2$ выполняется для любого произвольного положения точки на пространственной кривой, т.е. для произвольного момента времени. Соответственно, для дифференциалов:

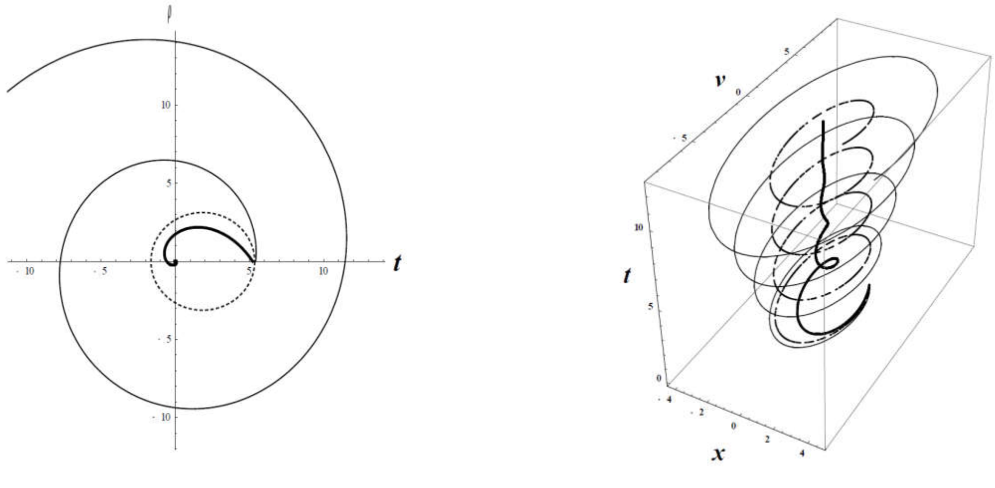
$$du^2 = \underbrace{(dx^2 + dv^2 + dt^2)}_{dL} - \underbrace{(dx^2 + dv^2)}_{d\ell}.$$

Таким образом, для пространственной винтовой линии, обвивающей воображаемый прямой эллиптический цилиндр, шаг между витками равен периоду движения точки по эллипсу, а учитывая, что α=const, для произвольной точки:

$$dt = \text{tg}\alpha \cdot \sqrt{dx^2 + dv^2}.$$

Фазовые портреты осцилляторов во всех режимах отличаются от общепринятых и соответствуют друг другу больше, чем принято традиционно. Обычно считается, что фазовый портрет линейного осциллятора в режиме свободных колебаний, плоская кривая — эллипс (приведён на рис. 1, 3а), замкнутая кривая (подробнее см. [1]). Фазовые портреты осцилляторов в режиме затухающих колебаний и в режиме вынужденных колебаний — кривые незамкнутые — логарифмические спирали: соответственно — сходящаяся и расходящаяся (подробнее можно посмотреть, например, в [1 и 2]). В приложении 2 приведены вычисления для получения аналитического вида детерминанта. Очевидно, что он представляет собой функцию, а не константу.

Учтя трёхмерность осциллятора, как это сделано в настоящей статье, фазовые портреты следует изображать иначе (рис. 3*б*).



а) б)

Рис. 3.

а) Фазовые портреты осцилляторов как двумерные системы. Штрихованная кривая — осциллятор в режиме свободных колебаний (осциллятор 1); жирная кривая — осциллятор в режиме затухающих колебаний (осциллятор); тонкая кривая — осциллятор в режиме вынужденных колебаний (осциллятор 3);
б) Фазовые портреты осцилляторов как трёхмерные системы. Штрихованная кривая — осциллятор 1; жирная кривая — осциллятор 2; тонкая кривая — осциллятор 3

Как показывает рис. 3*б*, все три фазовых портрета осцилляторов — пространственные спирали: 1) осциллятор 1 — прямая эллиптическая спираль, 2) осциллятор 2 — суживающаяся спираль, 3) осциллятор 3 — расширяющаяся спираль.

Приведённый анализ работы осциллятора, показывает, что нет никаких оснований утверждать сохранение фазового объёма осциллятора, поскольку для любого режима его работы $D(t) \neq \mathrm{const}$, что показывают рис. 1 и 3, а значит, и $dD(t) / dt \neq 0$, и, следовательно, в любом режиме работы осциллятор не сохраняет фазовый объём.

Считаю приятным долгом поблагодарить В.И. Белоусова за помощь в работе с программой “Mathematica”.

Библиографический список

1. Андронов, А. А. Теория колебаний / А.А. Андронов, А.А. Витт, С.Э. Хайкин. — Москва : Гос. изд. физ.-мат. лит., 1959.
2. Дацко, В. С. Фазовый объём / В.С. Дацко. — Москва : Лика, 2011.
3. Кочин, Н. Е. Теоретическая гидромеханика. Ч.1 / Н.Е. Кочин, И.А. Кибель, Н.В. Розе. — Москва : Физматгиз, 1963.
4. Леонтович, М. А. Введение в термодинамику. Статистическая физика / М.А. Леонтович. — Москва : Наука,1983.
5. Терлецкий, Я. П. Статистическая физика / Я.П. Терлецкий. — Москва : Высш. шк., 1973.

Приложение 1

Ольховский И.И. Курс теоретической механики для физиков. – М.: Наука, 1970, с. 376.

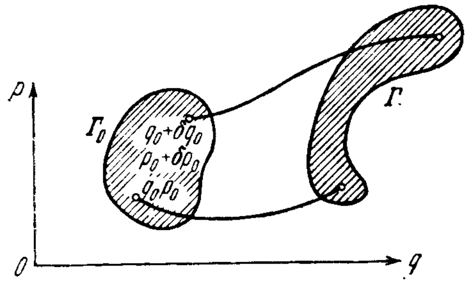
Рассмотрим бесконечную совокупность одинаковых механических систем, отличающихся друг от друга только начальными условиями. Иначе говоря, рассмотрим бесконечное множество точных копий данной реальной системы (для всех этих систем задан одинаковый гамильтониан, одни и те же диссипативные силы, но начальные условия этих систем различны). Такая виртуальная совокупность систем называется ансамблем Гиббса. Пусть в произвольный момент времени t_0 ансамбль заполняет область (Γ_0) фазового пространства, причём фазовый объём этой области равен

$$\Gamma_0 = \int \dots_{(\Gamma_0)} \dots \int \delta q_{10} \dots \delta q_{s0} \delta p_{10} \dots \delta p_{s0}. \quad (43.2)$$

В момент времени $t = t_0 + \Delta t$ ансамбль займёт другую область (Γ) с фазовым объёмом

$$\Gamma = \int \dots_{(\Gamma)} \dots \int \delta q_1 \dots \delta q_s \delta p_1 \dots \delta p_s. \quad (43.3)$$

(см. рисунок, на котором изображено перемещение некоторого ансамбля систем в двумерном фазовом пространстве).



Найдём соотношение между величинами Γ и Γ_0 или закон изменения фазового объёма ансамбля Гиббса. Учитывая, что действительное перемещение каждой системы ансамбля подчинено уравнениям движения, а следовательно, переменные q, p в момент времени t являются функциями этих же переменных, взятых в начальный момент времени, запишем фазовый объём Γ в виде интеграла по области (Γ_0):

$$\Gamma = \int \dots_{(\Gamma_0)} \dots \int D\delta q_{10} \dots \delta q_{s0} \delta p_{10} \dots \delta p_{s0}, \quad (43.4)$$

где $D = \frac{\partial(q,p)}{\partial(q_0,p_0)}$ — якобиан преобразования переменных q, p к значениям этих переменных q_0, p_0 в момент времени t_0, а функции

$$q = q(q_0,p_0,t),\ p = p(q_0,p_0,t)$$

являются решениями уравнений движения.

Из сопоставления (43.4) и (43.2) видно, что задача об отыскании закона изменения Γ сводится к отысканию закона изменения якобиана D

Приложение 2

Вид детерминанта для линейного осциллятора. Доказательство $D \neq$ const

Дифференцируя выражения (43.2) и (43.3) из приложения 1, можно получить:

$$d\Gamma_0 = \mathrm{dV}_0 \text{ и } d\Gamma = dV,$$

где $dV_0 = \delta q_{10} \dots \delta q_{s0} \delta p_{10} \dots \delta p_{s0}$, а $dV = \delta q_1 \dots \delta q_s \delta p_1 \dots \delta p_s$. Очевидно, что $d\Gamma_0$ и $d\Gamma$ — фазовые объёмы соответствующих систем. Дифференцируя выражение (43.4), можно получить:

$$d\Gamma = D\mathrm{dV}_0 \text{ или } dV = D\mathrm{dV}_0,$$

т.е. $D = \frac{\partial(q,p)}{\partial(q_0,p_0)} = \frac{dV}{dV_0}$ — одна из форм представления детерминанта перехода.

Пусть задана некая динамическая система, чей явный вид неизвестен, подчиняющаяся для простоты уравнению движения в представлении Лагранжа с тремя переменными в форме:

$$x = x(x_0,v_0,t),$$

x — пространственная координата; v — скорость; t — время.

Поскольку переход от dV_0 к dV, т.е. от «старой» системы к «новой» осуществляется с помощью детерминанта D, а функциональная связь известна, то вид D устанавливается легко:

$$\begin{cases} x_n = x_n(x_0, v_0, t) \\ v_n = v_n(x_0, v_0, t). \\ t_n = t_n(x_0, v_0, t) \end{cases}$$

Отсюда следует, вводя обозначения «старой» системы буквой s,

$$\begin{cases} dx_n = \frac{\partial x_n}{\partial x_s} dx_s + \frac{\partial x_n}{\partial v_s} dx_s + \frac{\partial x_n}{\partial t_s} dt_s \\ dv_n = \frac{\partial v_n}{\partial x_s} dx_s + \frac{\partial v_n}{\partial v_s} dx_s + \frac{\partial v_n}{\partial t_s} dt_s \\ dt_n = \frac{\partial t_n}{\partial x_s} dx_s + \frac{\partial t_n}{\partial v_s} dx_s + \frac{\partial t_n}{\partial t_s} dt_s \end{cases} \rightarrow$$

$$\rightarrow \begin{vmatrix} dx_n \\ dv_n \\ dt_n \end{vmatrix} = D \begin{vmatrix} dx_s \\ dv_s \\ dt_s \end{vmatrix},$$

где

$$D = \begin{vmatrix} \frac{\partial x_n}{\partial x_s} & \frac{\partial x_n}{\partial v_s} & \frac{\partial x_n}{\partial t_s} \\ \frac{\partial v_n}{\partial x_s} & \frac{\partial v_n}{\partial v_s} & \frac{\partial v_n}{\partial t_s} \\ \frac{\partial t_n}{\partial x_s} & \frac{\partial t_n}{\partial v_s} & \frac{\partial t_n}{\partial t_s} \end{vmatrix}$$

Пусть для исследуемой системы известен гамильтониан H и справедливы уравнения Гамильтона, $\frac{\partial H}{\partial x} = -\dot{p}$, $\frac{\partial H}{\partial p} = \dot{x} - x$ и р — обобщённые переменные. $\frac{\frac{\partial H}{\partial x_s}}{\frac{\partial H}{\partial x_n}} = \frac{\partial x_n}{\partial x_s}$, поскольку гамильтониан один и тот же и в «старой» системе, и в «новой». С другой стороны,

$$\frac{\frac{\partial H}{\partial x_s}}{\frac{\partial H}{\partial x_n}} = \frac{-\dot{p}_s}{-\dot{p}_n} = \frac{\dot{p}_s}{\dot{p}_n}, \text{ поэтому } \frac{\partial x_n}{\partial x_s} = \frac{\dot{p}_s}{\dot{p}_n} = \frac{\dot{v}_s}{\dot{v}_n}.$$

$$\frac{\frac{\partial H}{\partial p_s}}{\frac{\partial H}{\partial x_n}} = \frac{\partial x_n}{\partial p_s} = \frac{\partial x_n}{m\partial v_s} = \frac{v_s}{-\dot{p}_n} \rightarrow \frac{\partial x_n}{\partial v_s} = -\frac{p_s}{\dot{p}_n} = -\frac{v_s}{\dot{v}_n}, \frac{\partial x_n}{\partial t_s} = \frac{\partial x_n}{\partial t_n}\frac{\partial t_n}{\partial t_s} = v_n \frac{\partial t_n}{\partial t_s}.$$

$$\frac{\dfrac{\partial H}{\partial x_s}}{\dfrac{\partial H}{\partial p_n}}=\frac{\partial p_n}{\partial x_s}=\frac{-\dot{p}_s}{v_n}\rightarrow\frac{\partial v_n}{\partial x_s}=-\frac{\dot{v}_s}{v_n},\frac{\partial v_n}{\partial v_s}=\frac{\partial}{\partial v_s}\frac{\partial H}{\partial p_n}=\frac{m\partial^2 H}{\partial p_s \partial p_n},$$

$$\frac{\partial v_n}{\partial t_s}=\frac{\partial v_n}{\partial t_n}\frac{\partial t_n}{\partial t_s}=\frac{\partial p_n}{m\partial t_n}\frac{\partial t_n}{\partial t_s}$$

$$\frac{\partial t_n}{\partial x_s}=\frac{\partial t_n}{\partial v_n}\frac{\partial v_n}{\partial x_s}=\frac{\partial t_n}{\partial v_n}\left(-\frac{\dot{v}_s}{v_n}\right),\frac{\partial t_n}{\partial v_s}=\frac{\partial t_n}{\partial x_n}\frac{\partial x_n}{\partial v_s}=\frac{\partial t_n}{\partial v_n}\left(-\frac{v_s}{\dot{v}_n}\right)$$

$$D=\begin{vmatrix}\dfrac{\partial x_n}{\partial x_s} & \dfrac{\partial x_n}{\partial v_s} & \dfrac{\partial x_n}{\partial t_s}\\ \dfrac{\partial v_n}{\partial x_s} & \dfrac{\partial v_n}{\partial v_s} & \dfrac{\partial v_n}{\partial t_s}\\ \dfrac{\partial t_n}{\partial x_s} & \dfrac{\partial t_n}{\partial v_s} & \dfrac{\partial t_n}{\partial t_s}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\dfrac{\dot{v}_s}{\dot{v}_n} & -\dfrac{v_s}{\dot{v}_n} & v_n\dfrac{\partial t_n}{\partial t_s}\\ -\dfrac{\dot{v}_s}{v_n} & \dfrac{m\partial^2 H}{\partial p_s\partial p_n} & \dfrac{\partial v_n}{\partial t_n}\dfrac{\partial t_n}{\partial t_s}\\ -\dfrac{\partial t_n}{\partial v_n}\left(\dfrac{\dot{v}_s}{v_n}\right) & -\dfrac{\partial t_n}{\partial v_n}\left(\dfrac{v_s}{\dot{v}_n}\right) & \dfrac{\partial t_n}{\partial t_s}\end{vmatrix}$$

$$D=\left(\frac{\partial t_n}{\partial t_s}\right)^2\cdot\begin{vmatrix}\dfrac{\dot{v}_s}{\dot{v}_n} & -\dfrac{v_s}{\dot{v}_n} & v_n\\ -\dfrac{\dot{v}_s}{v_n} & \dfrac{m\partial^2 H}{\partial p_s\partial p_n} & \dfrac{\partial v_n}{\partial t_n}\\ -\dfrac{\dot{v}_s}{v_n} & -\dfrac{v_s}{\dot{v}_n} & \dfrac{\partial v_n}{\partial t_n}\end{vmatrix}=\left(\frac{\partial t_n}{\partial t_s}\right)^2\cdot\left(\frac{\dot{v}_s}{v_n}\right)\cdot\left(\frac{v_s}{\dot{v}_n}\right)\cdot\begin{vmatrix}\dfrac{v_n}{\dot{v}_n} & -1 & v_n\\ -1 & \dfrac{m\partial^2 H}{\partial p_s\partial p_n}\cdot\dfrac{\dot{v}_n}{v_s} & \dfrac{\partial v_n}{\partial t_n}\\ -1 & -1 & \dfrac{\partial v_n}{\partial t_n}\end{vmatrix}$$

Если явный вид уравнений движения известен, то и D можно представить в более удобном виде.

Пусть исследуемая система — линейный осциллятор в режиме свободных колебаний.

Решение уравнения движения линейного осциллятора записывается как:

$$x = x_0 \cos \omega_0 t + (v_0/\omega_0) \sin \omega_0 t.$$

Выражения для x и v имеют вид:

$$x = x_s \cos \omega_0 t + (v_s/\omega_0) \sin \omega_0 t,$$

$$v = v_s \cos \omega_0 t - x_s\, \omega_0 \sin \omega_0 t.$$

Учитывая, что t — обратная функция к x (t_n — обратная функция к x_n), можно записать:

$$\partial x/\partial t = v,$$

$$\partial^2 x/\partial t^2 = -\omega_0^2 x, \text{ (из уравнения осциллятора)}$$

$$\partial t_n/\partial x_s = (\partial t_n/\partial x_n)\cdot(\partial x_n/\partial x_s) = (\partial x_n/\partial x_s)/(\partial x_n/\partial t_n) = $$
$$= (\partial x_n/\partial x_s)/v_n = \cos \omega_0 t/\ v_n,$$

$$\partial t_n/\partial v_s = (\partial t_n/\partial v_n)\cdot(\partial v_n/\partial v_s) = (\partial v_n/\partial v_s)/(\partial v_n/\partial t_n) = $$
$$= (\partial v_n/\partial v_s)/(-\omega_0^2 x_n) = \cos \omega_0 t/(-\omega_0^2\, x_n).$$

Тогда детерминант для осциллятора приобретёт вид:

$$D=\begin{vmatrix}\dfrac{\partial x_n}{\partial x_s} & \dfrac{\partial x_n}{\partial v_s} & \dfrac{\partial x_n}{\partial t_s}\\ \dfrac{\partial v_n}{\partial x_s} & \dfrac{\partial v_n}{\partial v_s} & \dfrac{\partial v_n}{\partial t_s}\\ \dfrac{\partial t_n}{\partial x_s} & \dfrac{\partial t_n}{\partial v_s} & \dfrac{\partial t_n}{\partial t_s}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}cos\omega_0 t & \dfrac{sin\omega_0 t}{\omega_0} & v_n\dfrac{\partial t_n}{\partial t_s}\\ -\omega_0 sin\omega_0 t & cos\omega_0 t & -\omega_0^2 x_0\dfrac{\partial t_n}{\partial t_s}\\ \dfrac{cos\omega_0 t}{v_n} & \dfrac{cos\omega_0 t}{-\omega_0^2 x_0} & \dfrac{\partial t_n}{\partial t_s}\end{vmatrix}=$$

$$=\begin{vmatrix}cos\omega_0 t & \dfrac{sin\omega_0 t}{\omega_0} & v_n d_{33}\\ -\omega_0 sin\omega_0 t & cos\omega_0 t & -\omega_0^2 x_0 d_{33}\\ \dfrac{cos\omega_0 t}{v_n} & \dfrac{cos\omega_0 t}{-\omega_0^2 x_0} & d_{33}\end{vmatrix}=d_{33}\cdot\begin{vmatrix}cos\omega_0 t & \dfrac{sin\omega_0 t}{\omega_0} & v_n\\ -\omega_0 sin\omega_0 t & cos\omega_0 t & -\omega_0^2 x_0\\ \dfrac{cos\omega_0 t}{v_n} & \dfrac{cos\omega_0 t}{-\omega_0^2 x_0} & 1\end{vmatrix}$$

$d_{33}=\frac{\partial t_n}{\partial t_s}$ определить несложно.

Как уже было показано, $dt = \mathrm{tg}\alpha \cdot \sqrt{dx^2 + dv^2}$. Отсюда легко получить:

$$d_{33} = \frac{dt_n}{dt_s} = \frac{\sqrt{dx_n^2 + dv_n^2}}{\sqrt{dx_s^2 + dv_s^2}}.$$

Используя алгебраические дополнения, можно получить:

$$D = detJ = d_{33} + \sin(\omega_0 t)\cdot\cos(\omega_0 t) \times$$

$$\times\left(\frac{v_n}{\omega_0 x_n} - \frac{\omega_0 x_n}{v_n}\right) - 2\cos^2 \omega_0 t.$$

Видно, что даже если в выражении для детерминанта положить d_{33} равным нулю, то детерминант всё равно будет отличен от нуля (и от константы). Допустимо даже более жёсткое заключение (и более точное), каким бы ни был элемент d_{33}, детерминант всё равно будет не константой, а функцией и он не равен тождественно нулю. Таким образом, факт $D \neq \mathrm{const}$ для линейного осциллятора в режиме свободных колебаний можно считать доказанным.

Поступила в редакцию
25.03.2016