В. О. Соловьев, Бигравитация в гамильтоновом формализме, *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2015, том 19, номер 1, 105–116

DOI: http://dx.doi.org/10.14498/vsgtu1388

Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки. 2015. Т. 19, № 1. С. 105–116
ISSN: 2310-7081 (online), 1991-8615 (print) doi: http://dx.doi.org/10.14498/vsgtu1388

УДК 515.124:531.123.6

БИГРАВИТАЦИЯ В ГАМИЛЬТОНОВОМ ФОРМАЛИЗМЕ*

В. О. Соловьев

Институт физики высоких энергий, НИЦ «Курчатовский институт»
Россия, 142281, г. Протвино, Московская обл., пл. Науки, 1.

Аннотация

Одним из путей решения проблемы темной энергии Вселенной является теория бигравитации, содержащая два метрических тензора, каждый из которых минимально взаимодействует со своим набором полей материи. Лагранжиан бигравитации является суммой двух лагранжианов общей теории относительности с разными гравитационными постоянными и разными наборами полей материи, а также потенциала взаимодействия двух метрик, не содержащего производных. В общем случае такая теория содержит 8 гравитационных степеней свободы: безмассовый гравитон, массивный гравитон и дух. Специальный выбор потенциала, предложенный де Рам, Габададзе и Толи (dRGT), позволяет избавиться от духовой степени свободы. Однако потенциал dRGT построен с помощью матричного квадратного корня и не является явной функцией от компонент двух метрик. Одним из путей обхода этой трудности является использование тетрадных переменных. В докладе рассмотрен альтернативный подход, в котором предполагается существование потенциала, выраженного дифференцируемой функцией компонент $(3+1)$-разложения двух метрик, затем выводятся свойства этой функции, необходимые и достаточные для исключения духовой степени свободы. Результаты получены с помощью анализа уравнений связи, возникающих в бигравитации, путем вычисления скобок Пуассона между связями и гамильтонианом. Основными гравитационными переменными являются две индуцированные на гиперповерхностях пространства метрики и сопряженные им импульсы, кроме того, в формализме в качестве вспомогательных переменных присутствуют функции смещения и сдвига обеих метрик. После этого исключения 3-х вспомогательных переменных остается набор из 4-х связей первого рода, порождающих диффеоморфизмы пространства-времени, относительно которых бигравитация инвариантна, и 2-х связей второго рода, исключающих духовую степень свободы. Получены следующие требования к потенциалу:

1) потенциал удовлетворяет системе линейных дифференциальных уравнений первого порядка относительно всех своих аргументов;
2) потенциал удовлетворяет однородному уравнению Монжа—Ампера относительно 4-х вспомогательных переменных;

Образец для цитирования

Соловьев В. О. Бигравитация в гамильтоновом формализме // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2015. Т. 19, № 1. С. 105–116. doi: 10.14498/vsgtu1388.

Сведения об авторе

Владимир Олегович Соловьев (д.ф.-м.н., с.н.с.; Vladimir.Soloviev@ihep.ru), старший научный сотрудник, отдел теоретической физики.

*Настоящая статья представляет собой расширенный вариант доклада [1], сделанного автором на Четвёртой международной конференции «Математическая физика и её приложения» (Россия, Самара, 25 августа – 1 сентября 2014).

3) гессиан потенциала относительно 3-х вспомогательных переменных не вырожден.

Ключевые слова: теория гравитации, биметрические теории, АДМ-формализм, уравнение Монжа—Ампера, гамильтоновы системы со связями.

doi: http://dx.doi.org/10.14498/vsgtu1388

Введение. Теории гравитации с двумя метриками пространства-времени периодически обсуждались в литературе [2–11]. В настоящее время интерес к ним объясняется надеждой решить проблему темной энергии. Вторая метрика может быть фиксированной или динамической. В первом случае мы имеем дело с массивной гравитацией, во втором — с бигравитацией. Давно было замечено, что массивная гравитация приводит к появлению так называемого духа Бульвара—Дезера [12]. Однако де Рам, Габададзе, Толи (dRGT) нашли весьма экзотические потенциалы, для которых этой неприятности удается избежать [10, 11, 13, 14]. Построение гамильтонова формализма для потенциалов dRGT является непростой задачей, так как в метрическом подходе их не удается записать в виде явной функции от компонент двух метрик. Альтернативой является применение тетрадных переменных [15–19], но и оно встречается со своими особыми трудностями. Здесь будет рассмотрен иной подход к построению гамильтонова формализма в метрических переменных, который не использует явное выражение для потенциала, предполагая только, что оно существует [20–24].

Мы будем обозначать пространственно-временные индексы строчными греческими буквами, а пространственные — строчными латинскими.

1. Гамильтониан бигравитации. Плотность лагранжиана бигравитации

$$\mathscr{L} = \mathscr{L}^{(f)} + \mathscr{L}^{(g)} - \sqrt{-g}U(f_{\mu\nu}, g_{\mu\nu})$$

состоит из двух почти независимых слагаемых

$$\mathscr{L}^{(f)} = \frac{1}{\kappa^{(f)}}\sqrt{-f}f^{\mu\nu}R^{(f)}_{\mu\nu} + \mathscr{L}^{(f)}_M(\psi^A, f_{\mu\nu}),$$
$$\mathscr{L}^{(g)} = \frac{1}{\kappa^{(g)}}\sqrt{-g}g^{\mu\nu}R^{(g)}_{\mu\nu} + \mathscr{L}^{(g)}_M(\phi^A, g_{\mu\nu})$$

и потенциала

$$\sqrt{-g}U(f_{\mu\nu}, g_{\mu\nu}).$$

Здесь $f_{\mu\nu}$, $g_{\mu\nu}$ — две динамические метрики пространства-времени, а ψ^A, ϕ^A — соответствующие поля источников.

Мы построим гамильтонов формализм этой теории и определим число гравитационных степеней свободы. Разлагая метрические тензоры по координатному базису, приходим к замене компонент метрики $f_{\mu\nu}$ так называемыми переменными Арновитта—Дезера—Мизнера (ADM) [25]:

$$||f_{\mu\nu}|| = \begin{pmatrix} -N^2 + \eta_{mn}N^mN^n & \eta_{jk}N^k \\ \eta_{ik}N^k & \eta_{ij} \end{pmatrix},$$

$$||g_{\mu\nu}|| = \begin{pmatrix} -\bar{N}^2 + \gamma_{mn}\bar{N}^m\bar{N}^n & \gamma_{jk}\bar{N}^k \\ \gamma_{ik}\bar{N}^k & \gamma_{ij} \end{pmatrix},$$

где метрикам пространства-времени $f_{\mu\nu}$, $g_{\mu\nu}$ соответствуют функции смещения N, $\bar{N}$, векторы сдвига N^i, $\bar{N}^i$, индуцированные на гиперповерхности состояния $x^0 = \mathrm{const}$ (пространственные) метрики η_{ij}, γ_{ij}. При этом оказывается, что единичная нормаль к гиперповерхности, заданная в метрике $f_{\mu\nu}$, выражается через функции смещения и сдвига:

$$n_\alpha = (-N, 0, 0, 0), \qquad n^\alpha = f^{\alpha\beta} n_\beta = \Big(\frac{1}{N}, -\frac{N^i}{N}\Big).$$

В дальнейшем вместо координатного базиса мы будем использовать базис Кухаржа [26–29] (n^α, e^α_i), построеннный так, что

- X^α — произвольная система координат пространства-времени;
- $e^\alpha(t, x^i)$ — функции вложения, $e^\alpha_i = \partial e^\alpha \big/ \partial x^i$,
- $X^\alpha = e^\alpha(t, x^i)$ — представление пространства-времени как однопараметрического семейства пространственноподобных гиперповерхностей постоянного t,
- $\eta_{ij} = f_{\mu\nu} e^\mu_i e^\nu_j$, $\gamma_{ij} = g_{\mu\nu} e^\mu_i e^\nu_j$ — индуцированные (пространственные) метрики.

Тензоры и векторы пространства-времени могут быть разложены по этому базису, например,

$$\begin{aligned} N^\alpha \equiv \frac{\partial e^\alpha}{\partial t} &= N n^\alpha + N^i e^\alpha_i, \\ ||f^{\mu\nu}|| &= \begin{pmatrix} (-1) n^\mu n^\nu & 0 \\ 0 & \eta^{ij} e^\mu_i e^\nu_j \end{pmatrix}, \\ ||g^{\mu\nu}|| &= \begin{pmatrix} -u^{-2} n^\mu n^\nu & u^j u^{-2} n^\mu e^\nu_j \\ u^i u^{-2} e^\mu_i n^\nu & (\gamma^{ij} - u^i u^j u^{-2}) e^\mu_i e^\nu_j \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

где

$$u = \frac{\bar{N}}{N}, \qquad u^i = \frac{\bar{N}^i - N^i}{N}.$$

Здесь функции $\bar{N}$, $\bar{N}^i$ получаются как компоненты разложения N^α по другому базису $(\bar{n}^\alpha, e^\alpha_i)$, построенному с помощью метрики $g_{\mu\nu}$, при этом оказывается, что

$$n^\alpha = u\bar{n}^\alpha + u^i e^\alpha_i.$$

Выгода перехода к базису Кухаржа состоит в том, что две метрики $f_{\mu\nu}$ и $g_{\mu\nu}$ в разложении Кухаржа имеют разное число независимых компонент. Так как базис (n^α, e^α_i) был определен на основе f-метрики, эта метрика $f_{\mu\nu}$ имеет только 6 переменных компонент $\eta_{ij} = f_{\mu\nu} e^\mu_i e^\nu_j$, а метрика $g_{\mu\nu}$ задается десятью переменными u, u^i,γ_{ij}.

В общем случае гамильтониан системы со связями 1-го рода имеет вид

$$H = H_0 + \lambda^\alpha \Phi_\alpha,$$

где Φ_α – набор связей 1-го рода, то есть выполнены условия инволюции:

$$\{\Phi_\alpha, \Phi_\beta\} = C^\gamma_{\alpha\beta} \Phi_\gamma, \qquad \{\Phi_\alpha, H_0\} = D^\beta_\alpha \Phi_\beta.$$

В общей теории относительности (ОТО) гамильтониан с точностью до поверхностных интегралов является линейной комбинацией 4-х связей $\mathscr{H}_\alpha = (\mathscr{H}, \mathscr{H}_i)$:

$$H = \int N^\alpha \mathscr{H}_\alpha d^3x,$$

причем

$$\begin{aligned}
\{\mathscr{H}_i(x), \mathscr{H}_j(y)\} &= \mathscr{H}_i(y)\delta_{,j}(x-y) + \mathscr{H}_j(x)\delta_{,i}(x-y),\\
\{\mathscr{H}_i(x), \mathscr{H}(y)\} &= \mathscr{H}(x)\delta_{,i}(x-y),\\
\{\mathscr{H}(x), \mathscr{H}(y)\} &= \left[\eta^{ij}(x)\mathscr{H}_j(x) + \eta^{ij}(y)\mathscr{H}_j(y)\right]\delta_{,i}(x-y).
\end{aligned}$$

Гамильтониан бигравитации имеет вид

$$\mathrm{H} = \int \left(N\mathscr{R} + N^i\mathscr{R}_i\right) d^3x,$$

где

$$\begin{aligned}
\mathscr{R} &= \frac{\delta \mathrm{H}}{\delta N} = \mathscr{H} + u\bar{\mathscr{H}} + u^i\bar{\mathscr{H}}_i + \tilde{U}(\eta_{ij}, \gamma_{ij}, u, u^i),\\
\mathscr{R}_i &= \frac{\delta \mathrm{H}}{\delta N^i} = \mathscr{H}_i + \bar{\mathscr{H}}_i,
\end{aligned}$$

причем $\mathscr{R}_\alpha$ должны быть связями, удовлетворяющими той же алгебре, то есть

$$\begin{aligned}
\{\mathscr{R}_i(x), \mathscr{R}_j(y)\} &= \mathscr{R}_i(y)\delta_{,j}(x-y) + \mathscr{R}_j(x)\delta_{,i}(x-y),\\
\{\mathscr{R}_i(x), \mathscr{R}(y)\} &= \mathscr{R}(x)\delta_{,i}(x-y),\\
\{\mathscr{R}(x), \mathscr{R}(y)\} &= \left[\eta^{ij}(x)\mathscr{R}_j(x) + \eta^{ij}(y)\mathscr{R}_j(y)\right]\delta_{,i}(x-y).
\end{aligned}$$

Вычисление вышеприведенных скобок Пуассона показывает, что необходимыми условиями реализации этой алгебры является выполнение следующих дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned}
2\eta_{jk}\frac{\partial \tilde{U}}{\partial \eta_{ij}} + 2\gamma_{jk}\frac{\partial \tilde{U}}{\partial \gamma_{ij}} - u^i\frac{\partial \tilde{U}}{\partial u^k} &= \delta^i_k \tilde{U},\\
2u^j\gamma_{jk}\frac{\partial \tilde{U}}{\partial \gamma_{k\ell}} - u^\ell u\frac{\partial \tilde{U}}{\partial u} + \left(\eta^{k\ell} - u^2\gamma^{k\ell} - u^k u^\ell\right)\frac{\partial \tilde{U}}{\partial u^k} &= 0. \qquad (1)
\end{aligned}$$

Варьирование гамильтониана по переменным u, u^i дает еще 4 уравнения:

$$\mathscr{S} \equiv \frac{1}{N}\frac{\delta \mathrm{H}}{\delta u} = \bar{\mathscr{H}} + \frac{\partial \tilde{U}}{\partial u} = 0, \qquad (2)$$

$$\mathscr{S}_i \equiv \frac{1}{N}\frac{\delta \mathrm{H}}{\delta u^i} = \bar{\mathscr{H}}_i + \frac{\partial \tilde{U}}{\partial u^i} = 0. \qquad (3)$$

В общем случае эти уравнения служат для определения u, u^i как функций от канонических координат η_{ij}, γ_{ij} и сопряженных к ним импульсов Π^{ij}, π^{ij} и поэтому не являются связями, наложенными на канонические переменные. Для исключения лишней степени свободы (духа Бульвара—Дезера) должна возникнуть связь на канонические переменные. Это произойдет, если уравнения (2), (3) окажутся функционально зависимыми, то есть если обратится в нуль якобиан

$$\frac{D(\mathscr{S}, \mathscr{S}_i)}{D(u, u^j)} = \left| \frac{\partial^2 \tilde{U}}{\partial u^a \partial u^b} \right| = 0,$$

который одновременно является гессианом потенциала по 4-м переменным u, u^i. Очевидно, что для исключения духа необходимо, чтобы потенциал бигравитации был решением однородного уравнения Монжа—Ампера в переменных u, u^i.

2. Специальный выбор потенциала. Потенциал dRGT [10, 11] выражается через матричный квадратный корень. Пусть

$$Y^\alpha_\beta = g^{\alpha\mu} f_{\mu\beta},$$

тогда

$$X = \sqrt{Y}, \qquad Y^\alpha_\beta = X^\alpha_\mu X^\mu_\beta.$$

Потенциал строится как линейная комбинация коэффициентов характеристического полинома матрицы X^α_β

$$P(\lambda) = \operatorname{Det}(X - \lambda I),$$

т. е. как комбинация симметричных многочленов матрицы:

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4,$$

$$\lambda_1\lambda_2 + \lambda_2\lambda_3 + \lambda_3\lambda_4 + \lambda_4\lambda_1 + \lambda_2\lambda_4 + \lambda_1\lambda_3,$$

$$\lambda_1\lambda_2\lambda_3 + \lambda_2\lambda_3\lambda_4 + \lambda_3\lambda_4\lambda_1 + \lambda_4\lambda_1\lambda_2,$$

$$\lambda_1\lambda_2\lambda_3\lambda_4,$$

или через следы степеней этой матрицы:

$$\operatorname{Sp} X,$$

$$\frac{1}{2}\left((\operatorname{Sp} X)^2 - \operatorname{Sp} X^2\right),$$

$$\frac{1}{6}\left((\operatorname{Sp} X)^3 - 3 \operatorname{Sp} X \operatorname{Sp} X^2 + 2 \operatorname{Sp} X^3\right),$$

$$\frac{1}{24}\left((\operatorname{Sp} X)^4 - 6(\operatorname{Sp} X)^2 \operatorname{Sp} X^2 + 3(\operatorname{Sp} X^2)^2 + 8 \operatorname{Sp} X \operatorname{Sp} X^3 - 6 \operatorname{Sp} X^4\right).$$

Как видно, мы не имеем формул для явного выражения ни собственных значений, ни следов степеней матрицы X. Однако ключевое свойство этого потенциала — исключение лишней степени свободы — может быть выражено языком дифференциальных уравнений, которым этот потенциал должен удовлетворять.

3. Исключение духа Бульвара—Дезера. Для потенциала общего вида получается соотношение

$$\{\mathscr{S}(x), \mathscr{S}(y)\} = (\Theta^i - \bar{U}^i \mathscr{S})(x)\delta_{,i}(x,y) - (\Theta^i - \bar{U}^i \mathscr{S})(y)\delta_{,i}(y,x),$$

где
$$\Theta^i = \left(\bar U^k \hat D\Big(\delta^i_k - 2\gamma_{jk}\frac{\partial}{\partial\gamma_{ij}}\Big) - \gamma^{ij}\frac{\partial}{\partial u^j}\right)\tilde U,$$
причем введено обозначение
$$\hat D = \frac{\partial}{\partial u} - \bar U^i\frac{\partial}{\partial u^i},$$
$(1, -\bar U^i)$ — нулевой вектор матрицы гессиана. Вычисления также приводят к следующим результатам:
$$\begin{aligned}
\{\mathscr R(x), \mathscr S(y)\} &= \left(u^i - u\bar U^i\right)\mathscr S(x)\delta_{,i}(x,y) - \left(u(\bar U^i\mathscr S)_{,i} + \Omega\right)\delta(x,y),\\
\{\mathscr R(x), \pi_u(y)\} &= \mathscr S(x)\delta(x,y),\\
\{\Omega(x), \pi_u(y)\} &= \Theta^i(x)\delta_{,i}(x,y) - \Theta^i(y)\delta_{,i}(y,x).
\end{aligned} \tag{4}$$
Если бы величины Θ^i оказались отличны от нуля, то из условия сохранения связи $\mathscr S = 0$ при гамильтоновой эволюции определялась бы переменная u, и не возникало бы новой связи. Это, в свою очередь, приводило бы к нечетному числу связей второго рода в теории и вследствие этого — к полуцелому числу степеней свободы. Используя технику неявного решения уравнения Монжа— Ампера, развитую в работе Лезнова и Файерли [30], удается доказать, что из уравнений (1) следует
$$\Theta^i = 0. \tag{5}$$
В наших обозначениях нулевой вектор гессиана есть $(1, -\bar U^i)$, что соответствует $\xi^i = -\bar U^i$ в обозначениях работы [30]. Заменим плотность потенциала $\tilde U$ функцией $V(\xi^i, \eta_{ij}, \gamma_{ij})$, так что
$$\frac{\partial\tilde U}{\partial u^i} = \frac{\partial V}{\partial\xi^i}, \qquad \frac{\partial\tilde U}{\partial u} = V - \xi^i\frac{\partial V}{\partial\xi^i},$$
тогда
$$\hat D\tilde U = \Big(\frac{\partial}{\partial u} - \bar U^k\frac{\partial}{\partial u^k}\Big)\tilde U = \Big(\frac{\partial}{\partial u} + \xi^k\frac{\partial}{\partial u^k}\Big)\tilde U = V.$$
Как показано в работе [30], условием интегрируемости уравнения Монжа— Ампера является равенство
$$\hat D\xi^i = \frac{\partial\xi^i}{\partial u} + \xi^k\frac{\partial\xi^i}{\partial u^k} = 0.$$
Кроме того, в цитированной работе доказано, что неявное решение последнего уравнения определяется из формулы
$$u^i - u\xi^i = (V^{-1})^{ik}\frac{\partial W}{\partial\xi^k},$$
где $W = W(\xi^i, \eta_{ij}, \gamma_{ij})$ — произвольная функция, а $(V^{-1})^{ik}$ — обратная матрица для следующего («малого») гессиана:
$$V_{ik} = \frac{\partial^2 V}{\partial\xi^i\partial\xi^k} \equiv \frac{\partial^2\tilde U}{\partial u^i\partial u^k}.$$

Дважды подействовав дифференциальным оператором $\hat{D}$ на полученное выше уравнение (1), получаем

$$\Theta^i = 0.$$

Заметим, что в работах [22–24] выполнение последнего уравнения приходится считать дополнительным требованием для потенциала.

Равенство (5) означает, что требование сохранения связи $\mathscr{S} = 0$ приводит к новому уравнению $\Omega = 0$. Как видно из формулы (4), это уравнение не содержит переменной u и поэтому является уравнением связи, наложенной на канонические переменные η_{ij}, γ_{ij} и Π^{ij}, π^{ij}. В свою очередь, вспомогательная переменная u определяется из требования стабильности связи $\Omega = 0$:

$$\dot{\Omega} = \{\Omega, \mathrm{H}\} = 0.$$

В таблице, приведенной ниже, иллюстрируется вычисление числа степеней свободы для различных моделей: для ОТО, для двух независимых копий ОТО, для бигравитации с потенциалом общего вида и для бигравитации с потенциалом dRGT.

	ОТО	ОТО×ОТО	БиГ (общая)	БиГ (dRGT)
variables ($2N$)	(γ_{ij}, π^{ij})	(γ_{ij}, π^{ij}) (η_{ij}, Π^{ij})	(γ_{ij}, π^{ij}) (η_{ij}, Π^{ij})	(γ_{ij}, π^{ij}) (η_{ij}, Π^{ij})
1st class (N_1)	$\mathscr{H}, \mathscr{H}_i$	$\mathscr{H}, \mathscr{H}_i$ $\bar{\mathscr{H}}, \bar{\mathscr{H}}_i$	$\mathscr{R}, \mathscr{R}_i$	$\mathscr{R}, \mathscr{R}_i$
2nd class (N_2)	—	—	—	$\mathscr{S}, \Omega$
DoF	2	4	8	7

Здесь

$$\mathrm{DoF} = \frac{2N - 2N_1 - N_2}{2};$$

безмассовое поле: $\mathrm{DoF} = 2$;
массивное поле спина s: $\mathrm{DoF} = 2s + 1$.

Заключение. Для исключения духовой степени свободы от потенциала требуется выполнение следующих условий:

1) потенциал является дифференцируемой функцией $\tilde{U} = \tilde{U}(u, u^i, \eta_{ij}, \gamma_{ij})$,
2) потенциал удовлетворяет следующим дифференциальным уравнениям 1-го порядка:

$$\begin{aligned} 2\eta_{ik}\frac{\partial \tilde{U}}{\partial \eta_{jk}} + 2\gamma_{ik}\frac{\partial \tilde{U}}{\partial \gamma_{jk}} - u^j\frac{\partial \tilde{U}}{\partial u^i} - \delta^j_i \tilde{U} &= 0, \\ 2u^j\gamma_{jk}\frac{\partial \tilde{U}}{\partial \gamma_{ik}} - u^i u\frac{\partial \tilde{U}}{\partial u} + \left(\eta^{ik} - u^2\gamma^{ik} - u^i u^k\right)\frac{\partial \tilde{U}}{\partial u^k} &= 0, \end{aligned}$$

3) большой гессиан является вырожденной матрицей:

$$\left|\frac{\partial^2 \tilde{U}}{\partial u^a \partial u^b}\right| = 0, \qquad u^a = (u, u^i),$$

4) малый гессиан должен быть невырожденным:

$$\left|\frac{\partial^2 \tilde{U}}{\partial u^i \partial u^j}\right| \neq 0, \qquad i = 1, 2, 3.$$

ORCID
Vladimir Soloviev: http://orcid.org/0000-0003-1474-1929

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Соловьев В. О. Бигравитация в гамильтоновом формализме / *Четвертая международная конференция «Математическая физика и ее приложения»*: материалы конф.; ред. чл.-корр. РАН И. В. Волович; д.ф.-м.н., проф. В. П. Радченко. Самара: СамГТУ, 2014. С. 334–335.
2. Rosen N. General Relativity and Flat Space. I // *Phys. Rev.*, 1940. vol. 57, no. 2. pp. 147–150. doi: 10.1103/physrev.57.147.
3. Rosen N. General Relativity and Flat Space. II // *Phys. Rev.*, 1940. vol. 57, no. 2. pp. 150–153. doi: 10.1103/physrev.57.150.
4. Rosen N. Flat-space metric in general relativity theory // *Ann. of Phys.*, 1963. vol. 22, no. 1. pp. 1–11. doi: 10.1016/0003-4916(63)90293-8.
5. Rosen N. A bi-metric theory of gravitation // *Gen. Rel. Grav.*, 1973. vol. 4, no. 6. pp. 435–447. doi: 10.1007/bf01215403.
6. Isham C. J., Salam A., Strathdee J. Spontaneous breakdown of conformal symmetry // *Phys. Lett. B*, 1970. vol. 31, no. 5. pp. 300–302. doi: 10.1016/0370-2693(70)90177-2.
7. Isham C. J., Salam A., Strathdee J. f-Dominance of Gravity // *Phys. Rev. D*, 1971. vol. 3, no. 4. pp. 867–873. doi: 10.1103/physrevd.3.867.
8. Zumino B. Effective Lagrangians and broken symmetries / *Lectures on Elementary Particles and Quantum Field Theory*. vol. 2; eds. S. Deser, M. Grisaru, H. Pedleton. Cambridge, MA: MIT Press, 1970. pp. 437–500.
9. Damour T., Kogan I. I. Effective Lagrangians and universality classes of nonlinear bigravity // *Phys. Rev. D*, 2002. vol. 66, no. 10, 104024. 17 pp., arXiv: hep-th/0206042. doi: 10.1103/physrevd.66.104024.
10. de Rham C., Gabadadze G., Tolley A. J. Resummation of Massive Gravity // *Phys. Rev. Lett.*, 2011. vol. 106, no. 23, 231101. 4 pp., arXiv: 1011.1232 [hep-th]. doi: 10.1103/physrevlett.106.231101.
11. de Rham C., Gabadadze G., Tolley A. J. Ghost free massive gravity in the Stückelberg language // *Phys. Lett. B*, 2012. vol. 711, no. 2. pp. 190–195, arXiv: 1107.3820 [hep-th]. doi: 10.1016/j.physletb.2012.03.081.
12. Boulware D. G., Deser S. Can Gravitation Have a Finite Range? // *Phys. Rev. D*, 1972. vol. 6, no. 12. pp. 3368–3382. doi: 10.1103/physrevd.6.3368.
13. Hassan S. F., Rosen R. A. Bimetric gravity from ghost-free massive gravity // *J. High Energ. Phys.*. vol. 2012, no. 2, 126, arXiv: 1109.3515 [hep-th]. doi: 10.1007/jhep02(2012)126.
14. Hassan S. F., Rosen R. A. Confirmation of the secondary constraint and absence of ghost in massive gravity and bimetric gravity // *J. High Energ. Phys.*, 2012. vol. 2012, no. 4, 123, arXiv: 1111.2070 [hep-th]. doi: 10.1007/jhep04(2012)123.
15. Hinterbichler K., Rosen R. A. Interacting spin-2 fields // *J. High Energ. Phys.*, 2012. vol. 2012, no. 7, 047, arXiv: 1203.5783 [hep-th]. doi: 10.1007/jhep07(2012)047.
16. Alexandrov S., Krasnov K., Speziale S. Chiral description of massive gravity // *J. High Energ. Phys.*, 2013. vol. 2013, no. 6, 068, arXiv: 1212.3614 [hep-th]. doi: 10.1007/JHEP06(2013)068.
17. Alexandrov S. Canonical structure of tetrad bimetric gravity // *Gen. Rel. Grav.*, 2014. vol. 46, no. 1, 1639, arXiv: 1308.6586 [hep-th]. doi: 10.1007/s10714-013-1639-1.

18. Kluson J. Hamiltonian formalism of bimetric gravity in vierbein formulation // *Eur. Phys. J. C.* vol. 74, no. 8, 2985, arXiv: 1307.1974 [hep-th]. doi: 10.1140/epjc/s10052-014-2985-1.
19. Soloviev V. O. *Bigravity in tetrad Hamiltonian formalism and matter couplings*, 2014. 25 pp., arXiv: 1410.0048 [hep-th].
20. Соловьев В. О., Чичикина М. В. Бигравитация в гамильтоновом формализме Кухаржа. Общий случай // *ТМФ*, 2013. Т. 176, № 3. С. 393–407. doi: 10.4213/tmf8450.
21. Soloviev V. O., Tchichikina M. V. Bigravity in Kuchar's Hamiltonian formalism. 2. The special case // *Phys. Rev. D*, 2013. vol. 88, no. 8, 084026, arXiv: 1302.5096 [hep-th]. doi: 10.1103/PhysRevD.88.084026.
22. Comelli D., Crisostomi M., Nesti F., Pilo L. Degrees of freedom in massive gravity // *Phys. Rev. D*, 2012. vol. 86, no. 10, 101502(R), arXiv: 1204.1027 [hep-th]. doi: 10.1103/physrevd.86.101502.
23. Comelli D., Nesti F., Pilo L. Weak massive gravity // *Phys. Rev. D*, 2013. vol. 87, no. 12, arXiv: 1302.4447 [hep-th]. doi: 10.1103/physrevd.87.124021.
24. Comelli D., Nesti F., Pilo L. Massive gravity: a general analysis // *J. High Energ. Phys.*, 2013. vol. 2013, no. 7, 161, arXiv: 1305.0236 [hep-th]. doi: 10.1007/jhep07(2013)161.
25. Arnowitt R., Deser S., Misner Ch. W. The Dynamics of General Relativity, Chapter 7 / *Gravitation: an introduction to current research*; ed. L. Witten: Wiley, 1962. pp. 227–265 ; Arnowitt R., Deser S., Misner Ch. W. Republication of: The dynamics of general relativity // *Gen. Relativ. Gravit.*. vol. 40, no. 9. pp. 1997–2027, arXiv: gr-qc/0405109. doi: 10.1007/s10714-008-0661-1.
26. Kuchař K. Geometry of hyperspace. I // *J. Math. Phys.*, 1976. vol. 17, no. 5. pp. 777–791. doi: 10.1063/1.522976.
27. Kuchař K. Kinematics of tensor fields in hyperspace. II // *J. Math. Phys.*, 1976. vol. 17, no. 5. pp. 792–800. doi: 10.1063/1.522977.
28. Kuchař K. Dynamics of tensor fields in hyperspace. III // *J. Math. Phys.*, 1976. vol. 17, no. 5. pp. 801–820. doi: 10.1063/1.522978.
29. Kuchař K. Geometrodynamics with tensor sources. IV // *J. Math. Phys.*, 1977. vol. 18, no. 8. pp. 1589–1597. doi: 10.1063/1.523467.
30. Fairlie D., Leznov A. General solutions of the Monge-Ampère equation in n-dimensional space // *J. Geom. Phys.*, 1995. vol. 16, no. 4. pp. 385–390, arXiv: hep-th/9403134. doi: 10.1016/0393-0440(94)00035-3.

Поступила в редакцию 16/XII/2014;
в окончательном варианте — 19/II/2015;
принята в печать — 26/II/2015.

Vestn. Samar. Gos. Techn. Un-ta. Ser. Fiz.-mat. nauki
[J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. & Math. Sci.], 2015, vol. 19, no. 1, pp. 105–116

ISSN: 2310-7081 (online), 1991-8615 (print) **doi:** http://dx.doi.org/10.14498/vsgtu1388

MSC: 83D05

BIGRAVITY IN HAMILTONIAN FORMALISM*

V. O. Soloviev

Institute for High Energy Physics, NRC "Kurchatov Institute",
1, Ploschad' Nauki, Protvino, Moskovskaya obl., 142281, Russian Federation.

Abstract

Theory of bigravity is one of approaches proposed to solve the dark energy problem of the Universe. It deals with two metric tensors, each one is minimally coupled to the corresponding set of matter fields. The bigravity Lagrangian equals to a sum of two General Relativity Lagrangians with the different gravitational coupling constants and different fields of matter accompanied by the ultralocal potential. As a rule, such a theory has 8 gravitational degrees of freedom: the massless graviton, the massive graviton and the ghost. A special choice of the potential, suggested by de Rham, Gabadadze and Toley (dRGT), allows to avoid of the ghost. But the dRGT potential is constructed by means of the matrix square root, and so it is not an explicit function of the metrics components. One way to do with this difficulty is to apply tetrads. Here we consider an alternative approach. The potential as a differentiable function of metrics components is supposed to exist, but we never appeal to the explicit form of this function. Only properties of this function necessary and sufficient to exclude the ghost are studied. The final results are obtained from the constraint analysis and the Poisson brackets calculations. The gravitational variables are the two induced metrics and their conjugated momenta. Also lapse and shift variables for both metrics are involved. After the exclusion of 3 auxiliary variables we stay with 4 first class constraints and 2 second class ones responsible for the ghost exclusion. The requirements for the potential are as follows:

1) the potential should satisfy a system of the first order linear differential equations;
2) the potential should satisfy the homogeneous Monge-Ampere equation in 4 auxiliary variables;
3) the Hessian of the potential in 3 auxiliary variables is non-degenerate.

Keywords: gravitation theory, bimetric theories, ADM formalism, Monge–Ampere equation, constraint Hamiltonian systems.

doi: http://dx.doi.org/10.14498/vsgtu1388

How to cite Reference

Soloviev V. O. Bigravity in Hamiltonian formalism, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. & Math. Sci.], 2015, vol. 19, no. 1, pp. 105–116. doi: 10.14498/vsgtu1388. (In Russian)

Author Details

Vladimir O. Soloviev (Dr. Phys. & Math. Sci.; Vladimir.Soloviev@ihep.ru), Senior Research Associate, Division of Theoretical Physics.

*This paper is an extended version of the paper [1], presented at the Mathematical Physics and Its Applications 2014 Conference.

ORCID
Vladimir Soloviev: http://orcid.org/0000-0003-1474-1929

REFERENCES

1. Soloviev V. O. Bigravity in Hamiltonian formalism, *The 4nd International Conference "Mathematical Physics and its Applications"*, Book of Abstracts and Conference Materials; eds. I. V. Volovich; V. P. Radchenko. Samara, Samara State Technical Univ., 2014, pp. 334–335 (In Russian).
2. Rosen N. General Relativity and Flat Space. I, *Phys. Rev.*, 1940, vol. 57, no. 2, pp. 147–150. doi: 10.1103/physrev.57.147.
3. Rosen N. General Relativity and Flat Space. II, *Phys. Rev.*, 1940, vol. 57, no. 2, pp. 150–153. doi: 10.1103/physrev.57.150.
4. Rosen N. Flat-space metric in general relativity theory, *Ann. of Phys.*, 1963, vol. 22, no. 1, pp. 1–11. doi: 10.1016/0003-4916(63)90293-8.
5. Rosen N. A bi-metric theory of gravitation, *Gen. Rel. Grav.*, 1973, vol. 4, no. 6, pp. 435–447. doi: 10.1007/bf01215403.
6. Isham C. J., Salam A., Strathdee J. Spontaneous breakdown of conformal symmetry, *Phys. Lett. B*, 1970, vol. 31, no. 5, pp. 300–302. doi: 10.1016/0370-2693(70)90177-2.
7. Isham C. J., Salam A., Strathdee J. f-Dominance of Gravity, *Phys. Rev. D*, 1971, vol. 3, no. 4, pp. 867–873. doi: 10.1103/physrevd.3.867.
8. Zumino B. Effective Lagrangians and broken symmetries, *Lectures on Elementary Particles and Quantum Field Theory*, vol. 2; eds. S. Deser, M. Grisaru, H. Pedleton. Cambridge, MA, MIT Press, 1970, pp. 437–500.
9. Damour T., Kogan I. I. Effective Lagrangians and universality classes of nonlinear bigravity, *Phys. Rev. D*, 2002, vol. 66, no. 10, 104024, 17 pp., arXiv: hep-th/0206042. doi: 10.1103/physrevd.66.104024.
10. de Rham C., Gabadadze G., Tolley A. J. Resummation of Massive Gravity, *Phys. Rev. Lett.*, 2011, vol. 106, no. 23, 231101, 4 pp., arXiv: 1011.1232 [hep-th]. doi: 10.1103/physrevlett.106.231101.
11. de Rham C., Gabadadze G., Tolley A. J. Ghost free massive gravity in the Stückelberg language, *Phys. Lett. B*, 2012, vol. 711, no. 2, pp. 190–195, arXiv: 1107.3820 [hep-th]. doi: 10.1016/j.physletb.2012.03.081.
12. Boulware D. G., Deser S. Can Gravitation Have a Finite Range?, *Phys. Rev. D*, 1972, vol. 6, no. 12, pp. 3368–3382. doi: 10.1103/physrevd.6.3368.
13. Hassan S. F., Rosen R. A. Bimetric gravity from ghost-free massive gravity, *J. High Energ. Phys.*, vol. 2012, no. 2, 126, arXiv: 1109.3515 [hep-th]. doi: 10.1007/jhep02(2012)126.
14. Hassan S. F., Rosen R. A. Confirmation of the secondary constraint and absence of ghost in massive gravity and bimetric gravity, *J. High Energ. Phys.*, 2012, vol. 2012, no. 4, 123, arXiv: 1111.2070 [hep-th]. doi: 10.1007/jhep04(2012)123.
15. Hinterbichler K., Rosen R. A. Interacting spin-2 fields, *J. High Energ. Phys.*, 2012, vol. 2012, no. 7, 047, arXiv: 1203.5783 [hep-th]. doi: 10.1007/jhep07(2012)047.
16. Alexandrov S., Krasnov K., Speziale S. Chiral description of massive gravity, *J. High Energ. Phys.*, 2013, vol. 2013, no. 6, 068, arXiv: 1212.3614 [hep-th]. doi: 10.1007/JHEP06(2013)068.
17. Alexandrov S. Canonical structure of tetrad bimetric gravity, *Gen. Rel. Grav.*, 2014, vol. 46, no. 1, 1639, arXiv: 1308.6586 [hep-th]. doi: 10.1007/s10714-013-1639-1.
18. Kluson J. Hamiltonian formalism of bimetric gravity in vierbein formulation, *Eur. Phys. J. C*, vol. 74, no. 8, 2985, arXiv: 1307.1974 [hep-th]. doi: 10.1140/epjc/s10052-014-2985-1.
19. Soloviev V. O. *Bigravity in tetrad Hamiltonian formalism and matter couplings*, 2014, 25 pp., arXiv: 1410.0048 [hep-th].
20. Soloviev V. O., Chichikina M. V. Bigravity in the Kuchař Hamiltonian formalism: The general case, *Theoret. and Math. Phys.*, 2013, vol. 176, no. 3, pp. 1163–1175, arXiv: 1211.6530 [hep-th]. doi: 10.1007/s11232-013-0097-y.

21. Soloviev V. O., Tchichikina M. V. Bigravity in Kuchař's Hamiltonian formalism. 2. The special case, *Phys. Rev. D*, 2013, vol. 88, no. 8, 084026, arXiv: 1302.5096 [hep-th]. doi: 10.1103/PhysRevD.88.084026.
22. Comelli D., Crisostomi M., Nesti F., Pilo L. Degrees of freedom in massive gravity, *Phys. Rev. D*, 2012, vol. 86, no. 10, 101502(R), arXiv: 1204.1027 [hep-th]. doi: 10.1103/physrevd.86.101502.
23. Comelli D., Nesti F., Pilo L. Weak massive gravity, *Phys. Rev. D*, 2013, vol. 87, no. 12, arXiv: 1302.4447 [hep-th]. doi: 10.1103/physrevd.87.124021.
24. Comelli D., Nesti F., Pilo L. Massive gravity: a general analysis, *J. High Energ. Phys.*, 2013, vol. 2013, no. 7, 161, arXiv: 1305.0236 [hep-th]. doi: 10.1007/jhep07(2013)161.
25. Arnowitt R., Deser S., Misner Ch. W. The Dynamics of General Relativity, Chapter 7, *Gravitation: an introduction to current research*; ed. L. Witten, Wiley, 1962, pp. 227–265 ; Arnowitt R., Deser S., Misner Ch. W. Republication of: The dynamics of general relativity, *Gen. Relativ. Gravit.*, vol. 40, no. 9, pp. 1997–2027, arXiv: gr-qc/0405109. doi: 10.1007/s10714-008-0661-1.
26. Kuchař K. Geometry of hyperspace. I, *J. Math. Phys.*, 1976, vol. 17, no. 5, pp. 777–791. doi: 10.1063/1.522976.
27. Kuchař K. Kinematics of tensor fields in hyperspace. II, *J. Math. Phys.*, 1976, vol. 17, no. 5, pp. 792–800. doi: 10.1063/1.522977.
28. Kuchař K. Dynamics of tensor fields in hyperspace. III, *J. Math. Phys.*, 1976, vol. 17, no. 5, pp. 801–820. doi: 10.1063/1.522978.
29. Kuchař K. Geometrodynamics with tensor sources. IV, *J. Math. Phys.*, 1977, vol. 18, no. 8, pp. 1589–1597. doi: 10.1063/1.523467.
30. Fairlie D., Leznov A. General solutions of the Monge-Ampère equation in n-dimensional space, *J. Geom. Phys.*, 1995, vol. 16, no. 4, pp. 385–390, arXiv: hep-th/9403134. doi: 10.1016/0393-0440(94)00035-3.

Received 16/XII/2014;
received in revised form 19/II/2015;
accepted 26/II/2015.