

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА

Фазовая структура обобщенной модели Гросса–Невё в (2+1)-мерном пространстве-времениВ. Ч. Жуковский^{1,a}, К. Г. Клименко^{2,b}¹ *Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова, физический факультет, кафедра теоретической физики. Россия, 119991, Москва, Ленинские горы, д. 1, стр. 2.*² *ФГБУ «Государственный научный центр Российской Федерации — Институт физики высоких энергий» Национального исследовательского центра «Курчатовский институт». Россия, 142281, Московская обл., Протвино.*E-mail: ^a zhukovsk@phys.msu.ru, ^b kklim@ihep.ru

Статья поступила 05.08.2015, подписана в печать 16.09.2015.

Исследована фазовая структура (2+1)-мерной модели Гросса–Невё с четырьмя различными каналами фермион-антифермионного взаимодействия и соответственно с четырьмя константами связи. Показано, что модель описывает пять различных фаз взаимодействия планарных фермионов, в которых могут по отдельности нарушаться как пространственная четность, так и киральная симметрия. В то же время продемонстрировано существование фазы, ранее не наблюдавшейся в подобных моделях, характеризующейся одновременным спонтанным нарушением обеих этих симметрий.

Ключевые слова: модель Гросса–Невё, фазовые переходы.

УДК: 530.145. PACS: 11.10.Kk, 04.60.Kz.

Введение

В последнее время большое внимание уделяется исследованию (2+1)-мерных моделей квантовой теории поля (КТП) с четырехфермионным взаимодействием типа Гросса–Невё (ГН) [1]. Частично этот интерес обусловлен простотой структуры КТП в двух пространственных измерениях. Благодаря этому, в низкоразмерных моделях КТП значительно легче исследовать физические эффекты, присутствующие реальному (3+1)-мерному миру, такие как динамическое нарушение симметрии [2–4], цветовая сверхпроводимость [5] и другие явления квантовой хромодинамики [3, 4]. Другим примером этого же рода является эффект спонтанного нарушения киральной симметрии, индуцированного внешним (хромо)магнитным полем. Впервые это явление также описывалось на основе (2+1)-мерных моделей ГН [4, 6–10]. Кроме того, эти модели полезны для разработки новых инструментов исследования в КТП. Чтобы не быть голословными, сошлемся на метод оптимальной теории возмущений, который получил большое развитие в рамках (2+1)-мерных моделей ГН [11, 12].

Существует, однако, и более физическая мотивация для изучения КТП в двух пространственных измерениях. В ее основе лежит наблюдение того факта, что многие системы в конденсированном состоянии имеют планарную кристаллическую структуру. Кроме того, что тоже немаловажно, их низкоэнергетический спектр возбуждений описывается эффективно на основе скорее релятивистского уравнения Дирака, чем уравнения Шрёдингера. Именно

к таким системам относятся, например, высокотемпературные керамические сверхпроводники на основе купратов, а также графен — плоская гексагональная кристаллическая решетка толщиной в один атом, состоящая из атомов углерода. Поскольку последовательной теории высокотемпературной сверхпроводимости не существует, большая роль при описании различных явлений в таких планарных системах, включая графен, отводится эффективным (2+1)-мерным КТП, в том числе и моделям типа ГН [13–20]. Последние особенно полезны при описании фазовых переходов в планарных системах под влиянием различных внешних факторов [21–25].

Как известно, в процессе фазовых превращений в спектре энергий квазичастиц возникает щель, и при этом, как правило, происходит спонтанное нарушение симметрии модели. Иными словами, при фазовом переходе у одночастичных возбуждений основного состояния системы спонтанным образом возникает масса, от вида которой, т.е. от вида массового члена лагранжиана системы, во многом зависит динамика физических процессов. В упомянутых выше работах (см., например, [3, 6, 23]) структура моделей ГН допускала, как правило, только один фазовый переход со спонтанным нарушением киральной инвариантности, во время которого в спектре фермионов и возникала щель (масса) одного простейшего вида.

В предлагаемой работе мы исследуем фазовую структуру обобщенной (2+1)-мерной модели ГН с четырьмя различными типами четырехфермионного взаимодействия. Мы показываем, что в этой модели возможны четыре различных фазовых перехода,

в каждом из которых нарушается спонтанно или P -четность, или киральная инвариантность, или обе эти симметрии модели одновременно. Соответственно в рамках данной обобщенной модели у квази-частиц могут возникнуть спонтанно четыре различных массовых члена, т. е. предсказывается большее разнообразие физических явлений, которые могут быть рассмотрены в рамках одной микроскопической теории.

1. Модель и ее эффективный потенциал

Мы исследуем (2+1)-мерную модель ГН, лагранжиан которой имеет вид

$$L = \bar{\Psi} i \hat{\partial} \Psi + \frac{G_1}{2N} (\bar{\Psi} \Psi)^2 + \frac{G_2}{2N} (\bar{\Psi} \tau \Psi)^2 + \frac{H_1}{2N} (\bar{\Psi} i \Gamma^5 \Psi)^2 + \frac{H_2}{2N} (\bar{\Psi} i \Gamma^3 \Psi)^2, \quad (1)$$

где $\Psi(x)$ — фундаментальный мультиплет $U(N)$ -группы, каждая компонента которого — четырехкомпонентный спинор Дирака, т. е. $\Psi^t(x) \equiv (\Psi_1^t(x), \dots, \Psi_N^t(x))$, где t — символ операции транспонирования, и $\Psi_a(x)$ есть спинор, преобразующийся по приводимому четырехмерному представлению группы $SO(2, 1)$ при каждом фиксированном значении $a = 1, \dots, N$. (Здесь и далее спинорные индексы и индексы группы $U(N)$ не указываются в явном виде, однако суммирование по ним всюду подразумевается.) В моделях типа (1) константы связи G_i, H_i не являются реальными константами взаимодействия фермионных квазичастиц между собой¹. Эти параметры скорее эффективно описывают кулоновское взаимодействие между квазичастицами, а также между квазичастицами и кристаллической решеткой планарной системы.

В (1) используются обозначения $\hat{\partial} = \sum_{\mu=0}^2 \Gamma^\mu \partial_\nu$, где $\Gamma^\mu = \text{diag}(\gamma^\mu, -\gamma^\mu)$,

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \gamma^1 = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (2)$$

Кроме того, для 4×4 -матриц Γ^3 и Γ^5 используется представление, в котором

$$\Gamma^3 = \begin{pmatrix} 0 & I \\ I & 0 \end{pmatrix}, \quad \Gamma^5 = \Gamma^0 \Gamma^1 \Gamma^2 \Gamma^3 = i \begin{pmatrix} 0 & -I \\ I & 0 \end{pmatrix}, \quad (3)$$

где I — единичная 2×2 -матрица. Кроме того, $\tau = -i \Gamma^3 \Gamma^5 = \text{diag}(1, 1, -1, -1)$. Все Γ^μ -матрицы ($\mu = 0, 1, 2, 3, 5$) антикоммутируют друг с другом и действуют в спинорном четырехмерном пространстве. Необходимо отметить, что лагранжиан (1)

инвариантен относительно двух дискретных киральных преобразований Γ^3 и Γ^5 и операции инверсии пространства P ($a = 1, \dots, N$):

$$\begin{aligned} \Gamma^3: \Psi_a &\rightarrow \Gamma^3 \Psi_a; & \Gamma^5: \Psi_a &\rightarrow \Gamma^5 \Psi_a; \\ P: \Psi_a(t, x, y) &\rightarrow \Gamma^5 \Gamma^1 \Psi_a(t, -x, y). \end{aligned} \quad (4)$$

Известно, что ГН модели типа (1) перенормируемы в рамках непerturbативного метода $1/N$ -разложения [3]. В силу этого в предлагаемой работе используется именно этот метод и, более того, предполагается, что $N \gg 1$. В этом случае достаточно рассмотреть свойства теории (1) только в лидирующем порядке по $1/N$, так как поправки более высоких порядков к любой динамической величине модели будут пренебрежимо малы.

Далее мы покажем, что при каждом фиксированном наборе констант связи в модели (1) реализуется одна из пяти возможных фаз A, B, C, D, E . В фазе A фермионы безмассовы, однако фазам B, C, D, E соответствует эффективный лагранжиан с возникающим спонтанным образом массовым членом фермионов вида $\bar{\Psi} \Psi, \bar{\Psi} \tau \Psi, \bar{\Psi} i \Gamma^5 \Psi$ и $\bar{\Psi} i \Gamma^3 \Psi$ соответственно. Так как каждый из этих массовых членов нарушает одну или две дискретные симметрии (4) модели (1), то эти же симметрии модели нарушаются спонтанным образом в соответствующих фазах.

Исследование фазовой структуры модели (1) удобно проводить с помощью эквивалентного лагранжиана со вспомогательными бозонными полями $\sigma_1, \sigma_2, \phi_1$ и ϕ_2 :

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[\bar{\Psi}, \Psi, \sigma_i, \phi_i] = & \bar{\Psi} \left[i \hat{\partial} - \sigma_1 - \sigma_2 \tau - i \phi_1 \Gamma^5 - i \phi_2 \Gamma^3 \right] \Psi - \\ & - N \sum_{k=1}^2 \left(\frac{\sigma_k^2}{4G_k} + \frac{\phi_k^2}{4H_k} \right). \end{aligned} \quad (5)$$

Из (5) нетрудно получить уравнения движения для вспомогательных полей,

$$\begin{aligned} \sigma_1 = -2 \frac{G_1}{N} \bar{\Psi} \Psi, & \quad \sigma_2 = -2 \frac{G_2}{N} \bar{\Psi} \tau \Psi, \\ \phi_1 = -2 \frac{H_1}{N} \bar{\Psi} i \Gamma^5 \Psi, & \quad \phi_2 = -2 \frac{H_2}{N} \bar{\Psi} i \Gamma^3 \Psi. \end{aligned} \quad (6)$$

Подставляя выражения (6) в (5), мы получаем исходный лагранжиан (1), что, по крайней мере, означает эквивалентность моделей (1) и (5) на полевых уравнениях движения. Это означает, что свойства вакуумного состояния модели (1), т. е. ее фазовую структуру, мы можем (и в силу удобства будем) рассматривать в рамках вспомогательного эквивалентного лагранжиана (5). В этом случае эффективное действие полей σ_i, ϕ_i в лидирующем порядке $1/N$ -разложения [3] имеет вид

¹В самом общем виде, т. е. с четырьмя отличными от нуля константами связи G_i, H_i , модель (1) впервые рассматривалась в работе [26] (частные случаи этой модели, когда некоторые из констант связи равны нулю, изучены в [2, 3, 21]). Однако в [26] при исследовании фазовой структуры модели допущены ошибки. Так как модели ГН с несколькими различными четырехфермионными структурами по-прежнему актуальны при изучении, например, свойств графена [18], то в предлагаемой работе мы восполняем существующий пробел в наших знаниях о фазовой структуре модели (1).

$$S_{\text{eff}}(\sigma_i, \varphi_i) = - \int dx^0 d^2x \sum_{k=1}^2 \left(\frac{\sigma_k^2}{4G_k} + \frac{\varphi_k^2}{4H_k} \right) - i \text{Tr}_{s,x} \ln(i\hat{\partial} - \sigma_1 - \sigma_2\tau - i\phi_1\Gamma^5 - i\phi_2\Gamma^3), \quad (7)$$

где операция $\text{Tr}_{s,x}$ означает шпур (след) как по четырехмерному спинорному (s), так и по (2+1)-мерному координатному (x) пространствам. Как известно, структура вакуума определяется вакуумными средними (конденсатами) бозонных полей σ_i и ϕ_i ($i = 1, 2$) (в дальнейшем конденсаты этих полей будем обозначать как $\langle \sigma_{1,2} \rangle$ и $\langle \phi_{1,2} \rangle$). Чтобы найти $\langle \sigma_{1,2} \rangle$ и $\langle \phi_{1,2} \rangle$, надо сначала найти эффективный потенциал модели, который связан с (7) соотношением

$$V_{\text{eff}}(\sigma_i, \phi_i) \int dx^0 d^2x = -S_{\text{eff}}(\sigma_i, \varphi_i) \Big|_{\sigma_i, \varphi_i = \text{const}}. \quad (8)$$

Следуя технике работы [27], можно получить из (7) и (8)

$$V_{\text{eff}}(\sigma_i, \phi_i) = \sum_{k=1}^2 \left(\frac{\sigma_k^2}{4G_k} + \frac{\phi_k^2}{4H_k} \right) + i \int \frac{dp_0 d^2\mathbf{p}}{(2\pi)^3} \text{Tr}_s \ln D(p), \quad (9)$$

где $D(p) = p_0\Gamma^0 - \mathbf{p}\Gamma - \sigma_1 - \sigma_2\tau - i\phi_1\Gamma^5 - i\phi_2\Gamma^3$ — оператор Дирака, стоящий в квадратных скобках формулы (5), в импульсном представлении. Так как $\text{Tr}_s \ln D(p) = \ln \text{Det} D(p) = \sum_i \ln \epsilon_i$, где ϵ_i — четыре собственных значения 4×4 -матрицы $D(p)$

$$\epsilon_{1,2,3,4} = \sigma_1 \pm \sqrt{\left(\sigma_2 \pm \sqrt{p_0^2 - \mathbf{p}^2} \right)^2 - \phi_1^2 - \phi_2^2}, \quad (10)$$

мы имеем из (9)

$$V_{\text{eff}}(\sigma_i, \phi_i) = \sum_{k=1}^2 \left\{ \frac{\sigma_k^2}{4G_k} + \frac{\phi_k^2}{4H_k} + i \int \frac{dp_0 d^2\mathbf{p}}{(2\pi)^3} \ln(p_0^2 - \mathbf{p}^2 - M_k^2) \right\}, \quad (11)$$

где $M_{1,2} = \sigma_2 \pm \sqrt{\sigma_1^2 + \phi_1^2 + \phi_2^2}$. Интегрирование по p_0 в (28) можно провести, используя общее соотношение $\int dp_0 \ln(p_0 - A) = i\pi|A|$, которое справедливо с точностью до бесконечного слагаемого, не зависящего от действительной величины A . Следовательно,

$$V_{\text{eff}}(\sigma_i, \phi_i) = \sum_{k=1}^2 \left\{ \frac{\sigma_k^2}{4G_k} + \frac{\phi_k^2}{4H_k} - \int \frac{d^2\mathbf{p}}{(2\pi)^2} \sqrt{\mathbf{p}^2 + M_k^2} \right\}. \quad (12)$$

Из (12) видно, что $V_{\text{eff}}(\sigma_i, \phi_i)$ — ультрафиолетово расходящаяся величина, которую мы сначала регуляризуем, ограничив область интегрирования в (12) условием $|\mathbf{p}| < \Lambda$. В результате с точностью до аддитивной константы, не зависящей от полей, имеем

$$V_{\text{eff}}^{\text{reg}}(\sigma_i, \phi_i) = \sum_{k=1}^2 \left\{ \frac{\sigma_k^2}{4} \left(\frac{1}{G_k} - \frac{2\Lambda}{\pi} \right) + \frac{\phi_k^2}{4} \left(\frac{1}{H_k} - \frac{2\Lambda}{\pi} \right) + \frac{|M_k|^3}{6\pi} + |M_k|^3 \mathcal{O}\left(\frac{|M_k|}{\Lambda}\right) \right\}. \quad (13)$$

Чтобы в пределе $\Lambda \rightarrow \infty$ из регуляризованного выражения (13) получить конечный $V_{\text{eff}}(\sigma_i, \phi_i)$, мы должны дополнительно потребовать, чтобы голые константы связи G_k, H_k имели следующую зависимость от параметра обрезания Λ :

$$\frac{1}{G_k} = \frac{2\Lambda}{\pi} + g_k, \quad \frac{1}{H_k} = \frac{2\Lambda}{\pi} + h_k. \quad (14)$$

В этом случае в пределе $\Lambda \rightarrow \infty$ мы получаем из (13) окончательное (перенормированное) выражение для эффективного потенциала

$$V(\sigma_i, \phi_i) = \sum_{k=1}^2 \left[\frac{g_k}{4} \sigma_k^2 + \frac{h_k}{4} \phi_k^2 + \frac{|M_k|^3}{6\pi} \right]. \quad (15)$$

Координаты точки глобального минимума (ТГМ) эффективного потенциала (15) определяют конденсаты $\langle \sigma_{1,2} \rangle$ и $\langle \phi_{1,2} \rangle$, которые играют фундаментальную роль в изучении свойств вакуумного состояния системы, т.е. всего того, что входит в понятие фазовой структуры (симметрия основного состояния, массы его одночастичных возбуждений и т.д.). Так, нетрудно видеть, что в нашем случае массовые члены фермионов в лагранжиане (5) возникают спонтанно, если конденсаты $\langle \sigma_{1,2} \rangle$ и $\langle \phi_{1,2} \rangle$ отличны от нуля. Для этого достаточно в (5) сделать сдвиг полей

$$\sigma_{1,2} \rightarrow \sigma_{1,2} + \langle \sigma_{1,2} \rangle, \quad \phi_{1,2} \rightarrow \phi_{1,2} + \langle \phi_{1,2} \rangle. \quad (16)$$

2. Фазовая структура модели

Исследуем эффективный потенциал (15) на глобальный минимум. Прежде всего отметим, что функция $V(\sigma_i, \phi_i)$ четна по каждой из четырех независимых переменных $\sigma_{1,2}$ и $\phi_{1,2}$. Поэтому достаточно провести ее исследование на множестве $\phi_{1,2} \geq 0$ и $\sigma_{1,2} \geq 0$ (где, очевидно, $M_1 \equiv \sigma_2 + \sqrt{\sigma_1^2 + \phi_1^2 + \phi_2^2} \geq 0$). Далее, структура функции (15) такова, что ее ТГМ удобно искать, используя сначала переменные $M_1, M_2, x = \phi_1^2$ и $y = \phi_2^2$, а в конце вернуться к старым переменным $\phi_{1,2} \geq 0$ и $\sigma_{1,2} \geq 0$. Так как $\sigma_1^2 = -x - y + (M_1 - M_2)^2/4$ и $\sigma_2^2 = (M_1 + M_2)^2/4$, то в новых переменных эффективный потенциал (15) примет вид

$$V(M_1, M_2, x, y) = \frac{g_1}{16} (M_1 - M_2)^2 + \frac{g_2}{16} (M_1 + M_2)^2 + \frac{h_1 - g_1}{4} x + \frac{h_2 - g_1}{4} y + \frac{|M_1|^3}{6\pi} + \frac{|M_2|^3}{6\pi}. \quad (17)$$

При этом, очевидно, возникают следующие ограничения на новые переменные: $M_1 \geq 0, -\infty < M_2 < \infty, x, y \geq 0$ и $x + y \leq (M_1 - M_2)^2/4$. Нахождение ТГМ функции (17) в нашей работе проводится в два этапа. Сначала мы ищем ее минимум (при фиксированных $M_{1,2}$) по переменным x и y , изменяющимся в замкнутой и ограниченной области $\omega = \{(x, y): x, y \geq 0, x + y \leq (M_1 - M_2)^2/4\}$. Затем полученное выражение минимизируем по оставшейся паре переменных $M_{1,2}$.

Так как $V(M_1, M_2, x, y)$ есть линейная по x и y функция, то ее наименьшее значение на треугольной области достигается в одной из вершин этого треугольника, т.е. в одной из следующих точек: $(x_1=0, y_1=0)$, $(x_2=(M_1-M_2)^2/4, y_2=0)$ и $(x_3=0, y_3=(M_1-M_2)^2/4)$. В них эффективный потенциал (17) принимает соответственно следующие значения:

$$\begin{aligned} V_1(M_1, M_2) &\equiv V(M_1, M_2, x=x_1, y=y_1) = \\ &= \frac{g_1}{16}(M_1-M_2)^2 + \frac{g_2}{16}(M_1+M_2)^2 + \\ &+ \frac{M_1^3}{6\pi} + \frac{|M_2|^3}{6\pi}, \end{aligned} \quad (18)$$

$$\begin{aligned} V_2(M_1, M_2) &\equiv V(M_1, M_2, x=x_2, y=y_2) = \\ &= \frac{h_1}{16}(M_1-M_2)^2 + \frac{g_2}{16}(M_1+M_2)^2 + \\ &+ \frac{M_1^3}{6\pi} + \frac{|M_2|^3}{6\pi}, \end{aligned} \quad (19)$$

$$\begin{aligned} V_3(M_1, M_2) &\equiv V(M_1, M_2, x=x_3, y=y_3) = \\ &= \frac{h_2}{16}(M_1-M_2)^2 + \frac{g_2}{16}(M_1+M_2)^2 + \\ &+ \frac{M_1^3}{6\pi} + \frac{|M_2|^3}{6\pi}. \end{aligned} \quad (20)$$

Очевидно, что для нахождения наименьшего значения функции $V(M_1, M_2, x, y)$ по x и y нужно сравнить между собой величины (18)–(20). С этой целью зафиксируем значение константы связи g_1 и разделим плоскость констант связи h_1 и h_2 на три области: I, II и III (рис. 1 для случая $g_1 > 0$), где $I = \{(h_1, h_2): h_1 > g_1, h_2 > g_1\}$, $II = \{(h_1, h_2): h_1 < g_1, h_2 > h_1\}$ и $III = \{(h_1, h_2): h_2 < g_1, h_2 < h_1\}$. Сравнение функций (18)–(20) между собой показывает, что:

1) в области I ТГМ эффективного потенциала (17) по переменным x и y имеет вид $(x=x_1, y=y_1)$, где $V(M_1, M_2, x, y)$ достигает своего наименьшего значения, равного $V_1(M_1, M_2)$ (18);

2) если константы связи h_1 и h_2 лежат в области II, то наименьшее значение эффективного потенциала (17) по переменным x и y достигается в точке $(x=x_2, y=y_2)$, в которой оно равно $V_2(M_1, M_2)$ (19);

3) наконец, если $(h_1, h_2) \in III$, то наименьшее значение функции $V(M_1, M_2, x, y)$ по x и y есть величина $V_3(M_1, M_2)$, которая достигается в точке $(x=x_3, y=y_3)$. Далее мы будем искать точки глобального минимума функций $V_1(M_1, M_2)$, $V_2(M_1, M_2)$ и $V_3(M_1, M_2)$ по переменным M_1 и M_2 , допустимые значения для которых $M_1 \geq 0$, $-\infty < M_2 < \infty$.

Мы начнем со случая, когда $(h_1, h_2) \in I$, т.е. с поиска ТГМ функции $V_1(M_1, M_2)$. Система уравнений стационарности для этой функции имеет вид

$$\frac{\partial V_1(M_1, M_2)}{\partial M_1} \equiv \frac{g_1}{8}(M_1-M_2) + \frac{g_2}{8}(M_1+M_2) + \frac{M_1^2}{2\pi} = 0, \quad (21)$$

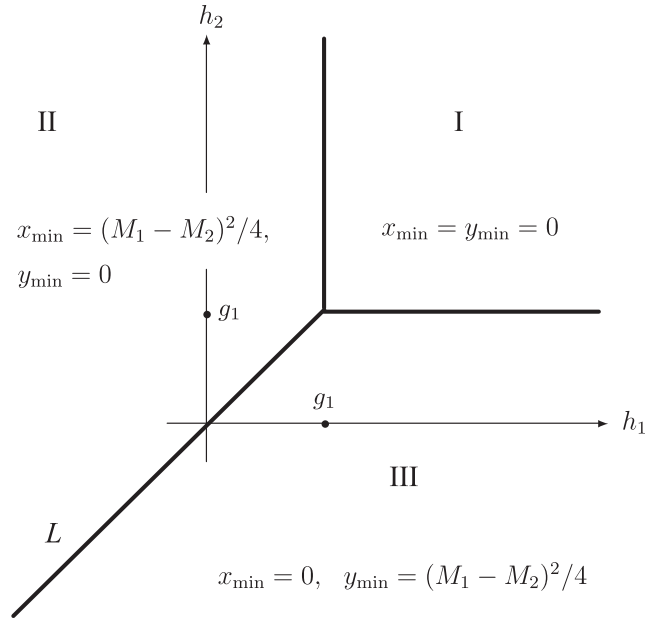


Рис. 1. Плоскость констант связи h_1 и h_2 разбита на три области: I, II и III. В каждой области даны координаты x_{\min} и y_{\min} точки наименьшего значения эффективного потенциала $V(M_1, M_2, x, y)$ как функции $(x, y) \in \omega = \{(x, y): x, y \geq 0, x + y \leq (M_1 - M_2)^2/4\}$. Линия L определена соотношением $L \equiv \{(h_1, h_2): h_1 = h_2\}$. Рисунок соответствует положительным значениям g_1

$$\begin{aligned} \frac{\partial V_1(M_1, M_2)}{\partial M_2} &\equiv \frac{g_1}{8}(M_2-M_1) + \frac{g_2}{8}(M_1+M_2) + \\ &+ \text{sign}(M_2) \frac{M_2^2}{2\pi} = 0, \end{aligned} \quad (22)$$

где $\text{sign}(x)$ есть знаковая функция. Обозначим ТГМ функции $V_1(M_1, M_2)$ как (M_{10}, M_{20}) . Она, очевидно, является решением системы уравнений (21) и (22) и зависит от значений констант связи g_1 и g_2 . Решая эту систему уравнений стационарности, можно найти поведение величин M_{10} и M_{20} в зависимости от g_1 и g_2 (рис. 2, где плоскость констант связи (g_1, g_2) разбита на три области, соответствующие разному виду величин M_{10} и M_{20}). А именно если $g_{1,2} > 0$, то $M_{10} = M_{20} = 0$. Если $g_2 < 0$ и $g_2 < g_1$, то $M_{10} = M_{20} = -\pi g_2/2$. Если $g_1 < 0$ и $g_2 > g_1$, то $M_{10} = -M_{20} = -\pi g_1/2$. Теперь, зная выражения для x_{\min} и y_{\min} (см. рис. 1), в которых вместо M_1 и M_2 необходимо использовать M_{10} и M_{20} , мы можем вернуться к исходным переменным $\phi_{1,2} \geq 0$ и $\sigma_{1,2} \geq 0$ и найти ТГМ $(\sigma_{1,2}^0, \phi_{1,2}^0)$ эффективного потенциала (15). При этом как следствие устанавливается вид вакуумных ожиданий $\langle \sigma_{1,2} \rangle \equiv \sigma_{1,2}^0$ и $\langle \phi_{1,2} \rangle \equiv \phi_{1,2}^0$. Таким образом, легко показать, что в случае $(h_1, h_2) \in I$ и $g_{1,2} > 0$, т.е. если

$$(g_1, g_2, h_1, h_2) \in \Omega_{10} \equiv \{(g_1, g_2, h_1, h_2): h_1 > g_1, h_2 > g_1; g_1 > 0, g_2 > 0\}, \quad (23)$$

координаты ТГМ функции (15) имеют вид $\sigma_{1,2}^0 = 0$, $\phi_{1,2}^0 = 0$. Это соответствует нулевым вакуумным средним скалярных полей, $\langle \sigma_{1,2} \rangle = 0$ и $\langle \phi_{1,2} \rangle = 0$.

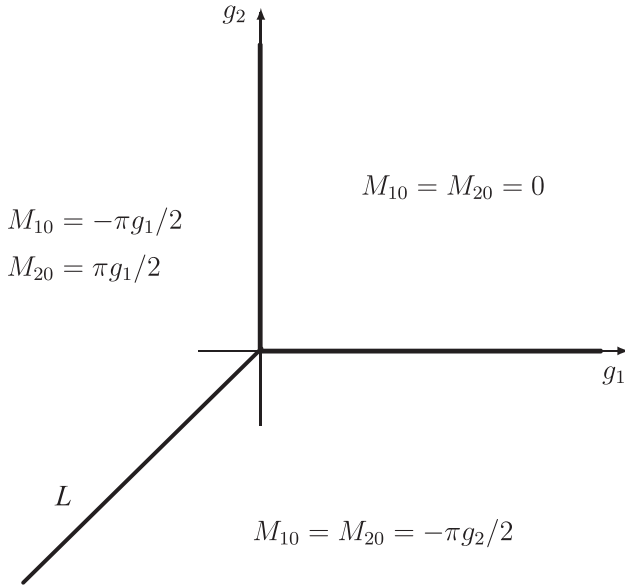


Рис. 2. Координаты M_{10} и M_{20} точки глобального минимума функции $V_1(M_1, M_2)$ (18) в зависимости от значений констант связи g_1, g_2 . Линия L определена соотношением $L \equiv \{(g_1, g_2): g_1 = g_2\}$

Аналогично показывается, что в случае $(h_1, h_2) \in I$, $g_1 < 0$ и $g_2 > g_1$, т. е. если

$$(g_1, g_2, h_1, h_2) \in \Omega_{I\sigma_1} \equiv \{(g_1, g_2, h_1, h_2): h_1 > g_1, h_2 > g_1; g_1 < 0, g_2 > g_1\}, \quad (24)$$

то мы имеем $\langle \sigma_1 \rangle = -\pi g_1/2$, $\langle \sigma_2 \rangle = 0$, $\langle \phi_{1,2} \rangle = 0$. Наконец, если $(h_1, h_2) \in I$, $g_2 < 0$ и $g_2 < g_1$, т. е. когда

$$(g_1, g_2, h_1, h_2) \in \Omega_{I\sigma_2} \equiv \{(g_1, g_2, h_1, h_2): h_1 > g_1, h_2 > g_1; g_2 < 0, g_2 < g_1\}, \quad (25)$$

то $\langle \sigma_2 \rangle = -\pi g_2/2$, $\langle \sigma_1 \rangle = 0$, $\langle \phi_{1,2} \rangle = 0$.

Если точка (h_1, h_2) принадлежит области II (при $g_1 > 0$ см. рис. 1), то нам необходимо исследовать на экстремум уже функцию $V_2(M_1, M_2)$. Поиск ее ТГМ (M_{10}, M_{20}) значительно упрощается в силу того, что функция $V_2(M_1, M_2)$ получается из (18) заменой $g_1 \rightarrow h_1$. Принимая во внимание этот факт, нетрудно найти зависимость M_{10} и M_{20} от констант связи h_1 и g_2 , если на рис. 2 произвести очевидную замену $g_1 \rightarrow h_1$. Отсюда, зная величины x_{\min} и y_{\min} при $(h_1, h_2) \in II$ (см. рис. 1), мы можем легко получить вакуумные средние полей $\phi_{1,2}$ и $\sigma_{1,2}$. А именно если

$$(g_1, g_2, h_1, h_2) \in \Omega_{II0} \equiv \{(g_1, g_2, h_1, h_2): h_1 < g_1, h_2 > h_1; h_1 > 0, g_2 > 0\}, \quad (26)$$

то $\langle \sigma_{1,2} \rangle = 0$ и $\langle \phi_{1,2} \rangle = 0$. Если

$$(g_1, g_2, h_1, h_2) \in \Omega_{II\phi_1} \equiv \{(g_1, g_2, h_1, h_2): h_1 < g_1, h_2 > h_1; h_1 < 0, g_2 > h_1\}, \quad (27)$$

то мы имеем $\langle \sigma_{1,2} \rangle = 0$, $\langle \phi_1 \rangle = -\pi h_1/2$, $\langle \phi_2 \rangle = 0$. Если

$$(g_1, g_2, h_1, h_2) \in \Omega_{II\sigma_2} \equiv \{(g_1, g_2, h_1, h_2): h_1 < g_1, h_2 > h_1; g_2 < 0, g_2 < h_1\}, \quad (28)$$

то $\langle \sigma_2 \rangle = -\pi g_2/2$, $\langle \sigma_1 \rangle = 0$, $\langle \phi_{1,2} \rangle = 0$. Подобным образом легко устанавливается и структура конденсатов $\langle \sigma_{1,2} \rangle$ и $\langle \phi_{1,2} \rangle$ в случае, когда точка (h_1, h_2) лежит в области III. Следовательно, если

$$(g_1, g_2, h_1, h_2) \in \Omega_{III0} \equiv \{(g_1, g_2, h_1, h_2): h_2 < g_1, h_2 < h_1; h_2 > 0, g_2 > 0\}, \quad (29)$$

то $\langle \sigma_{1,2} \rangle = 0$ and $\langle \phi_{1,2} \rangle = 0$. Если

$$(g_1, g_2, h_1, h_2) \in \Omega_{III\phi_2} \equiv \{(g_1, g_2, h_1, h_2): h_2 < g_1, h_2 < h_1; h_2 < 0, g_2 > h_2\}, \quad (30)$$

то мы имеем $\langle \sigma_{1,2} \rangle = 0$, $\langle \phi_2 \rangle = -\pi h_2/2$, $\langle \phi_1 \rangle = 0$. Наконец, если

$$(g_1, g_2, h_1, h_2) \in \Omega_{III\sigma_2} \equiv \{(g_1, g_2, h_1, h_2): h_2 < g_1, h_2 < h_1; g_2 < 0, g_2 < h_2\}, \quad (31)$$

то $\langle \sigma_2 \rangle = -\pi g_2/2$, $\langle \sigma_1 \rangle = 0$, $\langle \phi_{1,2} \rangle = 0$.

Из вышесказанного следует, что фазовый портрет исходной модели состоит из пяти различных фаз, которые можно обозначить как A, B, C, D, E .

Фаза A реализуется, когда константы связи (g_1, g_2, h_1, h_2) принадлежат области $\Omega_{I0} \cup \Omega_{II0} \cup \Omega_{III0}$ (см. (23), (26) и (29)). В ней ни одна из дискретных симметрий (4) не нарушена, все конденсаты бозонных полей и массы фермионов равны нулю.

В **фазе B**, т. е. при $(g_1, g_2, h_1, h_2) \in \Omega_{I\sigma_1}$ (см. (24)), мы имеем $\langle \sigma_1 \rangle = -\pi g_1/2$, $\langle \sigma_2 \rangle = 0$, $\langle \phi_{1,2} \rangle = 0$. Отсюда, используя сдвигку полей (16), видим, что у фермионов в лагранжиане спонтанно возникает массовый член $\sim \bar{\Psi}\Psi$, который P -инвариантен, но нарушает обе дискретные киральные симметрии модели Γ^3 и Γ^5 (4).

В **фазе C**, т. е. при $(g_1, g_2, h_1, h_2) \in \Omega_{I\sigma_2} \cup \Omega_{II\sigma_2} \cup \Omega_{III\sigma_2}$ (см. (25), (28) и (31)), мы имеем $\langle \sigma_2 \rangle = -\pi g_2/2$, $\langle \sigma_1 \rangle = 0$, $\langle \phi_{1,2} \rangle = 0$. Соответственно одночастичные фермионные возбуждения вакуума в этой фазе описываются массовым членом вида $\sim \bar{\Psi}\tau\Psi$, который нарушает P -четность, но оставляет ненарушенными Γ^3 и Γ^5 киральные симметрии модели.

В **фазе D**, т. е. при $(g_1, g_2, h_1, h_2) \in \Omega_{II\phi_1}$ (см. (27)), мы имеем $\langle \sigma_{1,2} \rangle = 0$, $\langle \phi_1 \rangle = -\pi h_1/2$, $\langle \phi_2 \rangle = 0$. Как легко видеть, в этом случае спонтанно нарушены как P -четность, так и киральная Γ^5 -симметрия (4), но Γ^3 -инвариантность модели сохраняется. Однофермионные возбуждения описываются массовым членом вида $\sim \bar{\Psi}i\Gamma^5\Psi$.

Наконец, **фаза E** реализуется в модели, если $(g_1, g_2, h_1, h_2) \in \Omega_{III\phi_2}$ (см. (30)). При этом $\langle \sigma_{1,2} \rangle = 0$, $\langle \phi_2 \rangle = -\pi h_2/2$, $\langle \phi_1 \rangle = 0$, а основное состояние системы P - и Γ^5 -инвариантно. Однако благодаря сдвигке полей (16), в фазе E в лагранжиане спонтанным образом генерируется массовый член вида $\sim \bar{\Psi}i\Gamma^3\Psi$, который нарушает Γ^3 -симметрию модели.

Заключение

Хорошо известно, что физические явления, происходящие в материалах со слоистой кристаллической

ской структурой (высокотемпературная сверхпроводимость, графен и т. д.), могут быть довольно успешно описаны в рамках релятивистских (2+1)-мерных моделей с четырехфермионным взаимодействием типа Гросса–Невё. Вот почему интерес к изучению эффектов, которые предсказываются в рамках этих моделей, а также влияние на них различных внешних факторов, не ослабевает уже почти тридцать лет [3, 4, 25]. Отметим, однако, что ранее (см., например, [20, 24]) с помощью таких моделей типа ГН рассматривался, как правило, простейший фазовый переход с нарушением киральной инвариантности.

В предлагаемой работе мы изучили фазовую структуру обобщенной (2+1)-мерной модели ГН (1) с несколькими константами связи, которая P -четна и инвариантна относительно двух дискретных киральных преобразований Γ^3 и Γ^5 (4). Мы показали, что, в зависимости от значений констант связи, модель (1) описывает пять различных фаз. Причем среди этих фаз есть такие, в которых спонтанным образом нарушается или P -четность (это фаза C), или киральная инвариантность (это фазы B и E), Кроме того, мы обнаружили новую фазу D с неизвестным ранее свойством, а именно в ней спонтанно нарушены как P -четность, так и киральная инвариантность. Следовательно, появляется возможность в рамках одной и той же микроскопической модели (1) описывать совершенно разные фазовые превращения.

Авторы признательны Д. Эберту (D. Ebert, Institute of Physics, Humboldt-Universität, Berlin) и П.Б. Колмакову (МГУ, физический факультет) за плодотворные дискуссии.

Список литературы

1. Gross D.J., Neveu A. // Phys. Rev. D. 1974. **10**. P. 3235.
2. Semenoff G.W., Wijewardhana L.C.R. // Phys. Rev. Lett. 1989. **63**. P. 2633.
3. Rosenstein B., Warr B.J., Park S.H. // Phys. Rep. 1991. **205**. P. 59.

Phase structure of a generalized Gross–Neveu model in (2+1)-dimensional space–time

V. Ch. Zhukovsky^{1,a}, K. G. Klimenko^{2,b}

¹Department of Theoretical Physics, Faculty of Physics, Lomonosov Moscow State University, Moscow 119991, Russia.

²State Research Center of Russian Federation — Institute for High Energy Physics, NRC «Kurchatov Institute», Protvino, Moscow Region 142281, Russia.

E-mail: ^azhukovsk@phys.msu.ru, ^bkklim@ihep.ru.

Phase structure is investigated of a (2+1)-dimensional Gross–Neveu model with four different channels of fermion–antifermion interaction and with four corresponding coupling constants. It is shown that the model describes five different phases of interaction of planar fermions, where both space parity or chiral symmetry may be separately violated. At the same time it is demonstrated that there exists a phase that was not previously observed in such models, which is characterized by a spontaneous violation of both these two phases together.

Keywords: Gross–Neveu model, phase transitions.

PACS: 11.10.Kk, 04.60.Kz.

Received 5 August 2015.

English version: *Moscow University Physics Bulletin* 6(2015).

Сведения об авторах

1. Жуковский Владимир Чеславович — доктор физ.-мат. наук, профессор; тел.: (495) 939-31-77, e-mail: zhukovsk@phys.msu.ru.
2. Клименко Константин Григорьевич — доктор физ.-мат. наук, гл. науч. сотрудник; тел.: (496) 774-11-98, e-mail: kklim@ihep.ru.

4. Вишивцев А.С., Жуковский В.Ч., Клименко К.Г., Магницкий Б.В. // ФЭЧАЯ 1998. **29**. С. 1259.
5. Ebert D., Klimenko K.G., Toki H. // Phys. Rev. D. 2001. **64**. P. 014038.
6. Klimenko K.G. // Z. Phys. C. 1992. **54**. P. 323.
7. Клименко К.Г. // ТМФ. 1992. **90**. С. 3.
8. Gusynin V.P., Miransky V.A., Shovkoou I.A. // Phys. Rev. Lett. 1994. **73**. P. 3499.
9. Вишивцев А.С., Клименко К.Г., Магницкий Б.В. // ЯФ. 1994. **57**. С. 2260.
10. Gusynin V.P., Hong D.K., Shovkoou I.A. // Phys. Rev. D. 1998. **57**. P. 5230.
11. Kneur J.-L., Pinto M.B., Ramos R.O., Staudt E. // Phys. Rev. D. 2007. **76**. P. 045020.
12. Klimenko K.G. // Mod. Phys. Lett. A. 1994. **9**. P. 1767.
13. Semenoff G.W., Shovkoou I.A., Wijewardhana L.C.R. // Mod. Phys. Lett. A. 1998. **13**. P. 1143.
14. Жуковский В.Ч., Клименко К.Г., Худяков В.В., Эберт Д. // Письма в ЖЭТФ 2001. **73**. С. 137.
15. Жуковский В.Ч., Клименко К.Г. // ТМФ 2003. **134**. С. 289.
16. Ferrer E.J., Gusynin V.P., Incera V. // Eur. Phys. J. B. 2003. **33**. P. 397.
17. Caldas H., Ramos R.O. // Phys. Rev. B. 2009. **80**. P. 115428.
18. Mesterhazy D., Berges J., von Smekal L. // Phys. Rev. B. 2012. **86**. P. 245431.
19. Nunes L.H.C.M., Farias R.L.S., Marino E.C. // Phys. Lett. A. 2912. **376**. P. 779.
20. Klimenko K.G., Zhokhov R.N., Zhukovsky V.C. // Phys. Rev. D. 2012. **86**. P. 105010.
21. Жуковский В.Ч., Клименко К.Г., Худяков В.В. // ТМФ 2000. **124**. С. 323.
22. Klimenko K.G., Zhokhov R.N. // Phys. Rev. D. 2013. **88**. P. 105015.
23. Жуковский В.Ч., Колмаков П.Б. // Вестн. Моск. ун-та. Физ. Астрон. 2013. № 4. С. 8.
24. Жохов Р.Н., Жуковский В.Ч., Колмаков П.Б. // Вестн. Моск. ун-та. Физ. Астрон. 2015. № 4. С. 12.
25. Ebert D., Khunjua T.G., Klimenko K.G., Zhukovsky V.C. // Phys. Rev. D. 2015. **91**. P. 105024.
26. Клименко К.Г. // ТМФ 1993. **95**. С. 42.
27. Ebert D., Klimenko K.G. // Phys. Rev. D. 2009. **80**. P. 125013.