ЯДЕРНАЯ ФИЗИКА, 2015, том 78, № 7-8, с. 664–667

ЭЛЕМЕНТАРНЫЕ ЧАСТИЦЫ И ПОЛЯ

АЛГЕБРА СВЯЗЕЙ В БИГРАВИТАЦИИ

© 2015 г. В. О. Соловьев*

НИЦ "Курчатовский институт", Институт физики высоких энергий, Протвино, Россия

Поступила в редакцию 30.07.2014 г.

Определяется число степеней свободы в бигравитации для потенциала общего вида и для потенциала, введенного де Рам, Габададзе и Толи (dRGT). С этой целью строится гамильтонов формализм и изучается алгебра скобок Пуассона между связями. Потенциал общего вида приводит к теории с четырьмя связями 1-го рода, порожденными общекоординатной инвариантностью. Характерным свойством потенциала dRGT является обращение в нуль гессиана, что приводит к появлению двух дополнительных связей 2-го рода и исключению лишней степени свободы, т.е. духа Бульвара–Дезера. Особенностью работы является путь, позволяющий избежать явного выражения потенциала dRGT.

DOI: 10.7868/S0044002715030174

1. ВВЕДЕНИЕ

Одной из возможностей объяснения наблюдаемого ускоренного расширения Вселенной или темной энергии является модификация теории гравитации на космологических расстояниях, т.е. в инфракрасной области. Среди разных обобщений ОТО (общей теории относительности) здесь заметное место принадлежит теориям массивной гравитации [1] и бигравитации.

Долгое время считалось, что нельзя построить теорию массивной гравитации без духов [2]. Однако недавно такая теория появилась [3]. Скептики по-прежнему уверены в несостоятельности массивной гравитации, новая критика обнаруживает в массивной гравитации сверхсветовые эффекты и нарушения причинности [4]. Не исключено все же, что их удастся избежать в теории с двумя динамическими метриками, т.е. в так называемой бигравитации. Эта теория возникла еще в начале 1970-х годов [5], интерес к ней периодически затухал и возрождался, следующая волна пришла в начале 2000-х годов [6] в связи с появлением теорий многомерного мира и с первыми указаниями на ускоренное космологическое расширение. Наконец, последний всплеск интереса связан с открытием dRGT-потенциала (де Рам, Габададзе, Толи) [3] и его свойствами[1)].

2. ГАМИЛЬТОНОВ ФОРМАЛИЗМ

Анализ внутренней структуры теории может быть выполнен в гамильтоновом формализме, независимо от теории возмущений. Первоначально работы в этом направлении велись параллельно с гамильтоновым анализом массивной гравитации и опирались на найденную Хасаном и Розен [8] замену переменных. Непосредственные вычисления затруднены необычным видом функции потенциала, построенной из симметричных полиномов от собственных значений матрицы Y, которая определяется как квадратный корень из другой матрицы Z, образованной сворачиванием двух метрик по одному из их индексов: $Z^\alpha_\beta = g^{\alpha\mu} f_{\mu\beta}$. Дифференцировать такой потенциал мы не умеем, а без этого, казалось бы, не построить ни связей, ни гамильтонова формализма в целом.

Хасан и Розен обошли эту трудность, предложив специальную замену переменных и непростые матричные вычисления. По нашему мнению, в мире вряд ли найдется больше 5–10 человек, способных разобраться в этом доказательстве, и вряд ли ему можно обучать студентов. Поэтому задачей было построить более прозрачный формализм, позволяющий выполнять стандартные процедуры с возникающими связями: вычислять скобки Пуассона и Дирака, классифицировать множество связей по родам (связи первого и второго рода), доказывать замкнутость и самосогласованность множества связей и гамильтониана.

Идея заключается в рассмотрении теории с потенциалом общего вида, зависящим от двух метрик пространства-времени, или, точнее, от компонент разложения этих метрик по базису, построенному с помощью одной из них. В известном формализме АДМ [9] используется разложение метрик по коор-

[1)] Один из вариантов этого потенциала уже обсуждался 40 лет тому назад в работе Зумино [7].

*E-mail: Vladimir.Soloviev@ihep.ru; http://th1.ihep.su/~soloviev

динатному базису:

$$||f_{\mu\beta}|| = \begin{pmatrix} -N^2 + N^k N_k & N_j \\ N_i & \eta_{ij} \end{pmatrix},$$

$$||g^{\alpha\mu}|| = \begin{pmatrix} -\bar{N}^{-2} & \bar{N}^j \bar{N}^{-2} \\ \bar{N}^i \bar{N}^{-2} & \gamma^{ij} - \bar{N}^i \bar{N}^j \bar{N}^{-2} \end{pmatrix}.$$

Более подходящим для бигравитации является другой подход к построению гамильтонова формализма, предложенный Кухаржем [10], где временные компоненты тензоров заменяются их нормальными (по отношению к гиперповерхности состояния) компонентами. Тогда число компонент разложения одной из метрик по построенному с ее помощью базису уменьшается до шести:

$$||f_{\mu\beta}|| = \begin{pmatrix} -[n_\mu n_\beta] & 0 \\ 0 & \eta_{ij}[e^i_\mu e^j_\beta] \end{pmatrix},$$

$$||g^{\alpha\mu}|| = \begin{pmatrix} -u^{-2}[n^\alpha n^\mu] & u^j u^{-2}[n^\alpha e^\mu_j] \\ u^i u^{-2}[e^\alpha_i n^\mu] & (\gamma^{ij} - u^i u^j u^{-2})[e^\alpha_i e^\mu_j] \end{pmatrix}.$$

Это существенно упрощает работу с потенциалом взаимодействия двух метрик, который теперь зависит не от 20, а только от 16 переменных.

В подходе Кухаржа используются две системы координат пространства-времени: одна из них произвольна X^α, а другая τ, x^i связана с выбором семейства гиперповерхностей, т.е. та же, что у Арновита, Дезера и Мизнера [9]. Связь между этими системами дают четыре функции, называемые переменными вложения $X^\alpha = e^\alpha(\tau, x^i)$, которые использовались в работах Дирака [11], построившего общековариантный (т.е. инвариантный относительно диффеоморфизмов) гамильтонов формализм теории поля.

Гамильтониан бигравитации имеет вид

$$H = \int d^3x \left[N \left(\mathcal{H} + u\bar{\mathcal{H}} + u^i \bar{\mathcal{H}}_i + \tilde{U} \right) + \right.$$
$$\left. + N^i \left(\mathcal{H}_i + \bar{\mathcal{H}}_i \right) \right].$$

Координатная инвариантность потенциала в гамильтоновом формализме проявляется в независимости от пути эволюции, т.е. от выбора промежуточной последовательности состояний, позволяющих перейти от начальной гиперповерхности к конечной. Для выполнения этого требования необходимо и достаточно [12] существование конкретной алгебры связей первого рода. Начиная с потенциала общего вида, мы получаем линейные дифференциальные уравнения первого порядка, которым должен удовлетворять этот потенциал, чтобы такая алгебра имела место и в бигравитации:

$$2\eta_{ik} \frac{\partial \tilde{U}}{\partial \eta_{jk}} + 2\gamma_{ik} \frac{\partial \tilde{U}}{\partial \gamma_{jk}} - u^j \frac{\partial \tilde{U}}{\partial u^i} - \delta^j_i \tilde{U} = 0,$$

$$2u^j \gamma_{jk} \frac{\partial \tilde{U}}{\partial \gamma_{ik}} - u^i u \frac{\partial \tilde{U}}{\partial u} +$$
$$+ \left(\eta^{ik} - u^2 \gamma^{ik} - u^i u^k \right) \frac{\partial \tilde{U}}{\partial u^k} = 0.$$

Подсчет показывает, что в общем случае, имея только четыре связи первого рода, теория бигравитации описывает восемь степеней свободы, т.е. содержит так называемый дух Бульвара–Дезера [2]. Поэтому следующим требованием на потенциал является необходимость породить дополнительную связь, дающую надежду на избавление от этого духа. Это должна быть связь на основные канонические переменные бигравитации, каковыми являются две индуцированные на гиперповерхности метрики $\eta_{ij} = f_{\mu\nu} e^\mu_i e^\nu_j$, $\gamma_{ij} = g_{\mu\nu} e^\mu_i e^\nu_j$ и их сопряженные импульсы Π^{ij}, π^{ij}, всего 12 пар сопряженных переменных. В теории также присутствует восемь переменных N, N^i, u, u^i, для которых лагранжиан не содержит скоростей их изменения. Варьирование по N, N^i дает уже упомянутые четыре связи первого рода

$$\mathcal{R} \equiv \mathcal{H} + u\bar{\mathcal{H}} + u^i \bar{\mathcal{H}}_i + \tilde{U} = 0,$$
$$\mathcal{R}_i \equiv \mathcal{H}_i + \bar{\mathcal{H}}_i = 0,$$

а варьирование по u, u^i дает четыре уравнения

$$\mathcal{S} \equiv \bar{\mathcal{H}} + \frac{\partial \tilde{U}}{\partial u} = 0, \quad \mathcal{S}_i \equiv \bar{\mathcal{H}}_i + \frac{\partial \tilde{U}}{\partial u^i} = 0, \quad (1)$$

из которых сами эти переменные и определяются в общем случае. Чтобы изменить последнее обстоятельство, необходимо вырождение, не позволяющее разрешить уравнения (1) относительно всех четырех вспомогательных переменных, т.е. необходимо обращение в нуль якобиана $\frac{D(\mathcal{S}, \mathcal{S}_i)}{D(u, u^j)}$. Из-за специального вида уравнений (1) этот якобиан оказывается равным гессиану потенциала как функции от переменных u, u^i. Таким образом, вторым необходимым условием на потенциал оказывается требование выполнения уравнения Монжа–Ампера

$$\left| \frac{\partial^2 \tilde{U}}{\partial u^a \partial u^b} \right| = 0.$$

Каким должен быть ранг матрицы гессиана? Потребуем, чтобы он был равен 3, так как приняв значение, меньшее 3, мы заведомо исключаем из области применения теории изотропные пространства, что кажется неоправданным произволом. Это условие будет третьим.

Переменные, связи и степени свободы в различных теориях гравитации (частично безмассовая бигравитация остается пока гипотетической)

	ОТО	Бигравитация (общий потенциал)	Бигравитация (dRGT)	Гипотетический случай
Канонические переменные	(γ_{ij},π^{ij})	(γ_{ij},π^{ij}) (η_{ij},Π^{ij})	(γ_{ij},π^{ij}) (η_{ij},Π^{ij})	(γ_{ij},π^{ij}) (η_{ij},Π^{ij})
Связи 1-го рода	$\mathcal{H},\mathcal{H}_i$	$\mathcal{R},\mathcal{R}_i$	$\mathcal{R},\mathcal{R}_i$	$\mathcal{R},\mathcal{R}_i$ $\mathcal{S},\Omega$
Связи 2-го рода	–	–	$\mathcal{S},\Omega$	–
Степени свободы	2	8	7	6

Оказывается, что перечисленные три требования (к ним можно добавить нулевое — о том, что потенциал вообще можно выразить в метрических переменных) достаточны для существования общековариантной теории бигравитации, свободной от духа Бульвара–Дезера, т.е. имеющей семь гравитационных степеней свободы. В такой теории с двумя метриками естественным оказывается присутствие полей материи двух разновидностей, так что каждая материя взаимодействует только со своей метрикой. Итак, возникает картина двух крайне слабо взаимодействующих миров, причем непосредственно взаимодействуют между собой только два поля гравитации, а влияние одной материи на другую является опосредованным.

Доказательство достаточности наложенных на потенциал условий состоит из анализа уравнений связи (см. таблицу) на основе известного метода Дирака, выполненного в работах [13]. В этом анализе весьма полезно неявное решение уравнения Монжа–Ампера, построенное Лезновым и Файерли [14], на что впервые было указано в работах по массивной гравитации с одной динамической метрикой [15].

3. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Доказано, что в теории появляется пятая связь на канонические переменные $\mathcal{S}=0$, не содержащая вспомогательных переменных u, u^i.

Доказано, что новая связь $\mathcal{S}$ на поверхности связей коммутирует (имеет нулевую скобку Дирака) сама с собой.

Доказано, что условием сохранения связи $\mathcal{S}=0$ во все моменты времени является еще одна связь $\Omega=0$, также не зависящая от вспомогательных переменных.

Доказано, что связи $\mathcal{S},\Omega$ не коммутируют между собой (имеют ненулевую скобку Дирака), т.е. являются связями второго рода.

Доказано, что условием сохранения связи Ω во времени является уравнение $\Psi=0$, линейное (но неоднородное) относительно вспомогательной переменной u. Из этого уравнения и определяется u.

Для дальнейших исследований представляет интерес выяснить, существуют ли в теории решения, на фоне которых число степеней свободы гравитационного поля уменьшается, т.е. реализуется ли частично безмассовый случай.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. В. А. Рубаков, П. Г. Тиняков, УФН **178**, 785 (2008) [Phys. Usp. **51**, 759 (2008)]; arXiv: 0802.4379 [hep-th]; D. Blas, arXiv: 0809.3744 [hep-th]; K. Hinterbichler, Rev. Mod. Phys. **84**, 671 (2012); arXiv: 1105.3735 [hep-th].
2. D. G. Boulware and S. Deser, Phys. Rev. D **6**, 3368 (1972).
3. C. de Rham, G. Gabadadze, and A. J. Tolley, Phys. Rev. Lett. **106**, 231101 (2011); arXiv: 1011.1232 [hep-th]; Phys. Lett. B **711**, 190 (2012); arXiv: 1107.3820 [hep-th].
4. S. Deser and A. Waldron, Phys. Rev. Lett. **110**, 111101 (2013); arXiv: 1212.5835 [hep-th].
5. C. J. Isham, A. Salam, and J. A. Strathdee, Phys. Lett. B **31**, 300 (1970); Phys. Rev. D **3**, 867 (1971).
6. T. Damour, and I. I. Kogan, Phys. Rev. D **66**, 104024 (2002).
7. B. Zumino, in *Brandeis Univ. Lectures on Elementary Particles and Quantum Field Theory* (MIT Press, Cambridge, 1970), Vol. 2, p. 437.
8. S. F. Hassan and R. A. Rosen, Phys. Rev. Lett. **108**, 041101 (2012); arXiv: 1106.3344 [hep-th]; JHEP **1202**, 126 (2012); arXiv: 1109.3515 [hep-th]; JHEP **1204**, 123 (2012); arXiv: 1111.2070 [hep-th]; S. F. Hassan, R. A. Rosen, and A. Schmidt-May, JHEP **1202**, 026 (2012); arXiv: 1109.3230 [hep-th].
9. R. Arnowitt, S. Deser, and Ch. W. Misner, in *Gravitation, an Introduction to Current Research,* Ed. by L. Witten (Wiley, New York, 1963) [рус. пер.:

Эйнштейновский сборник (Изд-во АН СССР, Москва, 1967)]; arXiv:gr-qc/0405109.

10. K. Kuchař, J. Math. Phys. **17**, 777, 792, 801 (1976); **18**, 1589 (1977).
11. P. A. M. Dirac, *Lectures on Quantum Mechanics* (Yeshiva University, New York, 1964).
12. C. Teitelboim, Ann. Phys. (N.Y.) **79**, 542 (1973).
13. В. О. Соловьев, М. В. Чичикина, ТМФ **176**, 393 (2013) [Theor. Math. Phys. **176**, 1163 (2013)]; arXiv: 1211.6530 [hep-th]; V. O. Soloviev and M. V. Tchichikina, Phys. Rev. D **88**, 084026 (2013); arXiv:1302.5096 [hep-th].
14. D. B. Fairlie and A. N. Leznov, J. Geom. Phys. **16**, 385 (1995); hep-th/9403134.
15. Z. Berezhiani, D. Comelli, F. Nesti, and L. Pilo, Phys. Rev. Lett. **99**, 131101 (2007); D. Comelli, F. Nesti, and L. Pilo, Phys. Rev. D **87**, 124021 (2013); arXiv: 1302.4447 [hep-th]; JHEP **1307**, 161 (2013); arXiv: 1305.0236 [hep-th].

CONSTRAINT ALGEBRA IN BIGRAVITY

V. O. Soloviev

In this article the number of degrees of freedom is found in bigravity, both for a general potential, and for the potential proposed by de Rham, Gabadadze and Tolley. For this purpose the Hamiltonian formalism is constructed, and the Poisson bracket algebra of the constraints is studied. The potential of a general form leads to a theory with four 1st-class constraints arising due to the general coordinate invariance. A crucial property of the dRGT potential is its zero Hessian, this leads to the two additional 2nd-class constraints, and to the exclusion of the Boulware–Deser ghost. A special feature of this work is avoiding the explicit dRGT potential formula.