Канонический формализм релятивистской теории гравитации

В.О. Соловьев, М.В. Чичикина

Аннотация

Построен гамильтониан для релятивистской теории гравитации (РТГ) с ненулевой массой гравитона. В качестве примера источника гравитации рассматривается скалярное поле. Исключены связи второго рода и построены скобки Дирака. Связи первого рода в теории отсутствуют. Показано, что соответствующим образом выбирая входящие в гамильтониан произвольные функции, можно получить генераторы группы Пуанкаре. Их скобки Дирака реализуют алгебру группы, в согласии с тем, что в РТГ имеются 10 законов сохранения.

1 Введение

Большинство физиков считает, что гравитационное поле, подобно остальным фундаментальным полям, должно быть проквантовано. Хорошо известны трудности, с которыми сталкивается квантование поля метрического тензора в общей теории относительности (ОТО). Представляет интерес вопрос о перспективах квантования альтернативных теорий гравитации. Имея в виду, что каноническое квантование является исторически и не только исторически, первым из методов объединения квантовой механики и классической теории, мы здесь, имея в виду программу квантования релятивистской теории гравитации (РТГ) [1], начнем с построения для этой теории гамильтонова формализма. В раннем варианте [2] решения задачи рассматривалась версия РТГ с нулевой массой гравитона, от которой впоследствии отказались. Новая постановка, т.е присутствие ненулевой массы гравитона, как будет видно из дальнейшего, приводит к существенно отличным результатам. В теории нет связей первого рода, число степеней свободы возрастает, инвариантность относительно группы Пуанкаре приводит к 10 интегралам движения.

Мы будем исходить из лагранжиана релятивистской теории гравитации [1], который позволяет более или менее стандартным способом осуществить переход к гамильтониану и найти скобки Пуассона.

2 Лагранжиан релятивистской теории гравитации

В отличие от общей теории относительности релятивистская теория гравитации содержит нединамическую плоскую метрику $h_{\mu\nu}$, которая входит в лагранжиан теории наряду с динамической римановой метрикой $g_{\mu\nu}$. Принимая скорость света равной единице мы можем, согласно работе [1], записать лагранжеву плотность гравитационного поля в виде

$$\mathcal{L} = \frac{1}{16\pi G}\sqrt{-g}R - \frac{m^2}{16\pi G}\left(\frac{1}{2}h_{\mu\nu}\tilde{g}^{\mu\nu} - \sqrt{-g} - \sqrt{-h}\right) + \ldots, \tag{1}$$

где многоточие обозначает поверхностные члены (4-дивергенции), греческие индексы принимают значения от 0 до 3, G – гравитационная постоянная, $g = \det(g_{\mu\nu})$, $h = \det(h_{\mu\nu})$, R – скалярная кривизна пространства-времени, определенная метрикой $g_{\mu\nu}$, m – масса гравитона. Используется сигнатура $(-1, 1, 1, 1)$.

С точностью до 4-дивергенций можно переписать лагранжеву плотность (1) в эквивалентном виде

$$\mathcal{L} = \frac{1}{16\pi G}\tilde{g}^{\mu\nu}\left(\Delta\Gamma^{\lambda}_{\mu\sigma}\Delta\Gamma^{\sigma}_{\nu\lambda} - \Delta\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu}\Delta\Gamma^{\sigma}_{\lambda\sigma}\right) - \frac{m^2}{16\pi G}\left(\frac{1}{2}h_{\mu\nu}\tilde{g}^{\mu\nu} - \sqrt{-g} - \sqrt{-h}\right) + \ldots, \tag{2}$$

где

$$\Delta\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu} \equiv \bar{\Gamma}^{\lambda}_{\mu\nu} - \Gamma^{\lambda}_{\mu\nu} = \frac{1}{2}g^{\lambda\sigma}\left(D_\mu g_{\sigma\nu} + D_\nu g_{\sigma\mu} - D_\sigma g_{\mu\nu}\right), \tag{3}$$

$\bar{\Gamma}^{\lambda}_{\mu\nu}$ – символы Кристоффеля римановой метрики, $\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu}$ – символы Кристоффеля плоской метрики, а D_μ – ковариантная производная, согласованная с плоской метрикой.

Независимыми переменными, подлежащими варьированию в действии, построенном из лагранжевых плотностей (1) или (2), могут служить, например, 10 компонент римановой метрики $g_{\mu\nu}$. Для упрощения формальных выкладок будут полезны также тензорные величины

$$f^{\mu\nu} \equiv \frac{\sqrt{-g}}{\sqrt{-h}} g^{\mu\nu}. \tag{4}$$

3 3+1-разложение тензоров и новое представление для лагранжевой плотности

При построении гамильтонова формализма необходимо выделить направление эволюции, т.е. физическое время. При этом совсем необязательно нарушать общую ковариантность теории и выбирать в качестве времени одну из координат X^α. В работах Кухаржа [3] было впервые показано, как следует строить 4-ковариантный канонический формализм. Здесь мы будем следовать этому методу, пользуясь также результатами работы [4].

Фиксированному моменту физического времени соответствует некоторая пространственноподобная гиперповерхность

$$X^\alpha = e^\alpha(x^i), \tag{5}$$

где x^i – независимые координаты на гиперповерхности, латинские индексы принимают значения от 1 до 3. В отличие от случаев, рассмотренных в работах [3], у нас имеется две метрики пространства-времени, а не одна, и мы требуем, чтобы поверхность была пространственноподобной по отношению к обеим метрикам.[1] Это означает наложение двух условий, справедливых во всех точках гиперповерхности,

$$\gamma_{ij}(x^k)dx^i dx^j > 0, \quad \eta_{ij}(x^k)dx^i dx^j > 0, \tag{6}$$

где использованы две различные индуцированные метрики:

$$\gamma_{ij} = g_{\mu\nu} e^\mu_{,i} e^\nu_{,j}, \quad \eta_{ij} = h_{\mu\nu} e^\mu_{,i} e^\nu_{,j}. \tag{7}$$

Очевидно, что в общем случае метрика η_{ij}, в отличие от $h_{\mu\nu}$, не является плоской.

Далее, мы будем предполагать, что все пространство-время может быть заполнено такими слоями постоянного физического времени, т.е.

[1] Возможность такого требования обеспечивается в РТГ постулатом причинности.

представлено в виде однопараметрического семейства пространственно-подобных гиперповерхностей:

$$X^\alpha = e^\alpha(x^i, t), \tag{8}$$

причем можно ввести векторное поле

$$N^\alpha = \frac{\partial e^\alpha}{\partial t}, \tag{9}$$

которое будет всюду времениподобным по отношению к обеим метрикам пространства-времени

$$g_{\alpha\beta} N^\alpha N^\beta < 0, \quad h_{\alpha\beta} N^\alpha N^\beta < 0. \tag{10}$$

Для $3+1$-разложения пространственно-временных тензоров необходимо ввести базис, связанный с гиперповерхностью фиксированного времени. Мы могли бы, например, использовать для этой цели четверку пространственно-временных векторов $(N^\alpha, e^\alpha_{,i})$. Однако на самом деле требуется два базиса: один, связанный с метрикой $g_{\mu\nu}$, и второй, связанный с метрикой $h_{\mu\nu}$. Раздвоение здесь происходит при переходе к нижним индексам

$$N_\beta = h_{\beta\alpha} N^\alpha, \quad \bar{N}_\beta = g_{\beta\alpha} N^\alpha, \tag{11}$$

и аналогично, появляются $e_{\alpha i}$ и $\bar{e}_{\alpha i}$. Технически более удобно ввести два других базиса, где в качестве времениподобной составляющей выбираются векторы единичной нормали к гиперповерхности $(n^\alpha, e^\alpha_{,i})$ и $(\bar{n}^\alpha, e^\alpha_{,i})$, определяемые, очевидно, соотношениями

$$h_{\alpha\beta} n^\alpha e^\beta_{,i} = 0, \quad h_{\alpha\beta} n^\alpha n^\beta = -1, \tag{12}$$

$$g_{\alpha\beta} \bar{n}^\alpha e^\beta_{,i} = 0, \quad g_{\alpha\beta} \bar{n}^\alpha \bar{n}^\beta = -1. \tag{13}$$

Теперь можно применять 3+1-разложение к величинам различной тензорной размерности, например,

$$\begin{aligned}
N^\alpha &= N n^\alpha + N^i e^\alpha_{,i} = \bar{N} \bar{n}^\alpha + \bar{N}^i e^\alpha_{,i}, \\
g^{\mu\nu} &= g^{\perp\perp} n^\mu n^\nu + g^{\perp j} n^\mu e^\nu_{,j} + g^{i\perp} e^\mu_{,i} n^\nu + g^{ij} e^\mu_{,i} e^\nu_{,j} = (-1) \bar{n}^\mu \bar{n}^\nu + \gamma^{ij} e^\mu_{,i} e^\nu_{,j}, \\
f^{\mu\nu} &= f^{\perp\perp} n^\mu n^\nu + f^{\perp j} n^\mu e^\nu_{,j} + f^{i\perp} e^\mu_{,i} n^\nu + f^{ij} e^\mu_{,i} e^\nu_{,j},
\end{aligned} \tag{14}$$

где

$$N = -n_\mu N^\mu, \quad N^i = e^i_\mu N^\mu, \quad \bar{N} = -\bar{n}_\mu N^\mu, \quad \bar{N}^i = \bar{e}^i_\mu N^\mu, \tag{15}$$

$$g^{\perp\perp} = n_\mu n_\nu g^{\mu\nu}, \quad g^{\perp j} = g^{j\perp} = -n_\mu e^j_\nu g^{\mu\nu}, \quad g^{ij} = e^i_\mu e^j_\nu g^{\mu\nu}, \ldots \tag{16}$$

Нетрудно установить линейную связь векторов двух базисов

$$\bar{n}^\alpha = \sqrt{-g^{\perp\perp}}\, n^\alpha - \frac{g^{i\perp}}{\sqrt{-g^{\perp\perp}}} e^\alpha_i, \tag{17}$$

и, соответственно, линейную связь составляющих, например,

$$\bar{N} = -\frac{1}{f^{\perp\perp}}\sqrt{\frac{\gamma}{\eta}} N, \quad \bar{N}^i = N^i - \frac{f^{\perp i}}{f^{\perp\perp}} N. \tag{18}$$

4 Построение канонического формализма для гравитационного поля

Для преобразования к нужному виду плотности лагранжиана (1) необходимо преобразовать два слагаемых, первое из которых не содержит ни массы гравитона, ни плоской метрики. Поэтому для первого слагаемого можно воспользоваться стандартными преобразованиями [3] ОТО, после чего, с точностью до поверхностных членов, оно оказывается равным

$$-\frac{N}{16\pi G}\frac{\gamma}{f^{\perp\perp}\sqrt{\eta}}(\tilde{R} - \bar{K}^2 + \mathrm{Sp}\bar{K}^2), \tag{19}$$

где $\tilde{R}$ – скалярная кривизна гиперповерхности, построенная с помощью метрики γ_{ij}, $\bar{K}_{ij}$ – вторая фундаментальная форма гиперповерхности в римановой геометрии, заданной метрикой $g_{\mu\nu}$, $\mathrm{Sp}\bar{K}^2 = \bar{K}_{ij}\bar{K}_{kl}\gamma^{ik}\gamma^{jl}$. Второе слагаемое, с учетом формулы

$$f^{ij} = \frac{1}{f^{\perp\perp}}\left(f^{\perp i}f^{\perp j} - \frac{\gamma\gamma^{ij}}{\eta}\right), \tag{20}$$

и после подстановки в него разложений (14), принимает вид

$$-N\sqrt{\eta}\frac{m^2}{16\pi G}\left[-1 - \frac{f^{\perp\perp}}{2} + \frac{f^{\perp i}f^{\perp j}\eta_{ij}}{2f^{\perp\perp}} - \frac{1}{f^{\perp\perp}}\frac{\gamma}{\eta}\left(\frac{1}{2}\eta_{ij}\gamma^{ij} - 1\right)\right], \tag{21}$$

как видно, оно не содержит скоростей и поэтому не влияет на определения импульсов.

Поверхностные вклады в лагранжеву плотность (полные производные по времени и пространственные дивергенции) не влияют на симплектическую структуру, и следовательно, на скобки Пуассона, граничные условия на пространственной бесконечности принимаются такими, что риманова метрика стремится к плоской метрике Минковского, а гиперповерхности стремятся к гиперплоскостям. Поэтому приходим к действию для гравитационного поля вида

$$\begin{aligned} S &= \int\limits_{t_1}^{t_2} dt \int\limits_{R^3} d^3x \left(-\frac{N}{16\pi G}\frac{\gamma}{f^{\perp\perp}\sqrt{\eta}}(\tilde{R} - \bar{K}^2 + \mathrm{Sp}\bar{K}^2) \right. \\ &- \left. N\sqrt{\eta}\frac{m^2}{16\pi G}\left[-1 - \frac{f^{\perp\perp}}{2} + \frac{f^{\perp i}f^{\perp j}\eta_{ij}}{2f^{\perp\perp}} - \frac{1}{f^{\perp\perp}}\frac{\gamma}{\eta}\left(\frac{1}{2}\eta_{ij}\gamma^{ij} - 1\right)\right]\right) \end{aligned} \tag{22}$$

При этом независимыми переменными, подлежащими варьированию, мы считаем $\gamma_{ij}(x^k, t)$, $f^{\perp\perp}(x^k, t)$, $f^{\perp i}(x^k, t)$. Известными и поэтому не подлежащими варьированию следует считать плоскую метрику пространства-времени $h_{\mu\nu}(X^\alpha)$ и функции, задающие однопараметрическое семейство пространственноподобных гиперповерхностей $e^\alpha(x^i, t)$, через них в свою очередь выражаются векторы базиса $n^\alpha(x^i, t), e^\alpha_i(x^i, t)$ и вектор $N^\alpha(x^i, t)$. Величины $\bar{K}_{ij}(x^i, t)$ даются известными из канонического формализма общей теории относительности формулами

$$\bar{K}_{ij} = \frac{1}{2\bar{N}}\left(\bar{N}_{i|j} + \bar{N}_{j|i} - \gamma_{ij,0},\right) \tag{23}$$

где в свою очередь функции $\bar{N}$ и $\bar{N}^i$ выражаются через N, N^i и $f^{\perp\perp}$, $f^{\perp i}$ формулами (18). Вертикальная черта обозначает ковариантную производную в римановой геометрии 3-мерного пространства, определяемую метрикой γ_{ij}. Чтобы не спутать обозначения импульсов с отношением длины окружности к ее диаметру, спрячем последнее в новую константу $\kappa = 16\pi G$.

Исходя из действия (22) для сопряженных импульсов находим соотношения

$$\pi_\perp = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial f^{\perp\perp}_{,0}} = 0, \tag{24}$$

$$
\begin{aligned}
\pi_i &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial f^{\perp i}_{,0}} = 0, &(25)\\
\pi_{ij} &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \gamma_{ij,0}} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \bar{K}_{ij}}\frac{\partial \bar{K}_{ij}}{\partial \gamma_{ij,0}} = -\frac{\sqrt{\gamma}}{\kappa}(\bar{K}^{ij} - \gamma^{ij}\bar{K}), &(26)
\end{aligned}
$$

из которых видно, что (24) и (25) являются первичными связями в терминологии Дирака [5] и должны быть добавлены к гамильтониану теории с произвольными множителями Лагранжа. Таким образом, получаем

$$
\mathrm{H} = \int\limits_{R^3} d^3x \left(\pi^{ij}\gamma_{ij,0} - \mathcal{L} + \lambda^{\perp}\pi_{\perp} + \lambda^i\pi_i\right), \tag{27}
$$

где необходимо выразить скорости через импульсы по формуле

$$
\gamma_{ij,0} = \bar{N}_{i|j} + \bar{N}_{j_i} + \frac{2\kappa\bar{N}}{\sqrt{\gamma}}(\pi_{ij} - \gamma_{ij}\frac{\pi}{2}). \tag{28}
$$

После этой процедуры гамильтониан гравитационного поля, с точностью до поверхностных членов, принимает вид

$$
\mathrm{H} = \int\limits_{R^3} d^3x \left(N\mathcal{H} + N^i\mathcal{H}_i + \lambda^{\perp}\pi_{\perp} + \lambda^i\pi_i\right), \tag{29}
$$

где

$$
\begin{aligned}
\mathcal{H} &= -\frac{1}{f^{\perp\perp}}\sqrt{\frac{\gamma}{\eta}}\bar{\mathcal{H}} - \frac{f^{\perp i}}{f^{\perp\perp}}\bar{\mathcal{H}}_i \\
&+ \frac{m^2\sqrt{\eta}}{\kappa}\left[-1 - \frac{f^{\perp\perp}}{2} + \frac{f^{\perp i}f^{\perp j}\eta_{ij}}{2f^{\perp\perp}} - \frac{1}{f^{\perp\perp}}\frac{\gamma}{\eta}\left(\frac{1}{2}\eta_{ij}\gamma^{ij} - 1\right)\right], &(30)\\
\mathcal{H}_i &= \bar{\mathcal{H}}_i = -2\pi^j_{i|j}, &(31)\\
\bar{\mathcal{H}} &= -\frac{1}{\sqrt{\gamma}}\left(\frac{1}{\kappa}\gamma\tilde{R} + \kappa(\frac{\pi^2}{2} - \mathrm{Sp}\pi^2)\right). &(32)
\end{aligned}
$$

Канонические скобки Пуассона

$$
\{F, G\} = \int\limits_{R^3} d^3x \left[\frac{\delta F}{\delta\gamma_{ij}}\frac{\delta G}{\delta\pi^{ij}} + \frac{\delta F}{\delta f^{\perp\perp}}\frac{\delta G}{\delta\pi_{\perp}} + \frac{\delta F}{\delta f^{\perp i}}\frac{\delta G}{\delta\pi_i} - (F \leftrightarrow G)\right] \tag{33}
$$

позволяют записать гамильтоновы уравнения в привычном виде

$$
\gamma_{ij,0} = \{\gamma_{ij}, \mathrm{H}\}, \quad \pi^{ij}_{,0} = \{\pi^{ij}, \mathrm{H}\}, \tag{34}
$$

$$f^{\perp\perp}_{,0} = \{f^{\perp\perp}, \mathrm{H}\}, \quad \pi_{\perp,0} = \{\pi_\perp, \mathrm{H}\}, \tag{35}$$

$$f^{\perp i}_{,0} = \{f^{\perp i}, \mathrm{H}\}, \quad \pi_{i,0} = \{\pi_i, \mathrm{H}\}. \tag{36}$$

Далее необходимо убедиться, что первичные связи (24), (25) согласованы с уравнениями движения, для этого следует обеспечить обращение в нуль производных по времени $\pi_{\perp,0}$ и $\pi_{i,0}$. Поскольку сопряженные переменные $f^{\perp\perp}$ и $f^{\perp i}$ входят в гамильтониан алгебраически, мы получаем вторичные связи в виде алгебраических уравнений

$$\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial f^{\perp\perp}} = 0, \quad \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial f^{\perp i}} = 0, \tag{37}$$

которые элементарно разрешаются и дают

$$f^{\perp i} = \frac{\kappa}{m^2\sqrt{\eta}}\eta^{ij}\bar{\mathcal{H}}_j, \tag{38}$$

$$f^{\perp\perp} = -\frac{\kappa}{m^2\sqrt{\eta}}\sqrt{\eta^{ij}\bar{\mathcal{H}}_i\bar{\mathcal{H}}_j + 2\frac{m^2\sqrt{\eta}}{\kappa}\left[\sqrt{\frac{\gamma}{\eta}}\bar{\mathcal{H}} + \frac{m^2\sqrt{\eta}}{\kappa}\frac{\gamma}{\eta}\left(\frac{1}{2}\eta_{ij}\gamma^{ij} - 1\right)\right]} \tag{39}$$

Из разрешенного вида вторичных связей легко увидеть, что их скобки Пуассона с первичными связями отличны от нуля, т.е. все связи являются связями второго рода и могут быть полностью исключены введением скобок Дирака. В данном случае скобки Дирака получаются из скобок Пуассона (33) простым исключением членов с переменными $(f^{\perp\perp}, \pi_\perp)$ и $(f^{\perp i}, \pi_i)$

$$\{F, G\}_D = \int\limits_{R^3} d^3x \left[\frac{\delta F}{\delta\gamma_{ij}}\frac{\delta G}{\delta\pi^{ij}} - \frac{\delta F}{\delta\pi^{ij}}\frac{\delta G}{\delta\gamma_{ij}}\right]. \tag{40}$$

Подставляя решения уравнений связи в гамильтониан получаем

$$\mathrm{H} = \int\limits_{R^3} d^3x \left[N\left(\sqrt{\eta^{ij}\bar{\mathcal{H}}_i\bar{\mathcal{H}}_j + 2\frac{m^2\sqrt{\eta}}{\kappa}\left[\sqrt{\frac{\gamma}{\eta}}\bar{\mathcal{H}} + \frac{m^2\sqrt{\eta}}{\kappa}\frac{\gamma}{\eta}\left(\frac{1}{2}\eta_{ij}\gamma^{ij} - 1\right)\right]} - \frac{m^2\sqrt{\eta}}{\kappa}\right) + N^i\bar{\mathcal{H}}_i\right]. \tag{41}$$

Мы пришли к гамильтониану, который зависит от канонических переменных γ_{ij}, π^{ij}, а также содержит зависимость от известной заранее (определяемой из фиксированной метрики пространства-времени и функций, определяющих гиперповерхности) метрики η_{ij}. Входящая константа обеспечивает нормировку энергии вакуума: если риманова метрика совпадает с плоской $g_{\mu\nu} = h_{\mu\nu}$, то при любом задании гиперповерхностей получаем $\mathrm{H} = 0$.

Добавим, что мы могли бы не сразу исключать из гамильтониана все связи и вводить скобки Дирака, а сначала согласовать вторичные связи с динамикой (34) – (35) – (36), нетрудно видеть, что это дало бы нам возможность найти определение лагранжевых множителей через канонические переменные, но не привело бы к новым связям. После подстановки найденных лагранжевых множителей в уравнения (35) – (36) мы получили бы соотношения, эквивалентные так называемым условиям гармоничности

$$D_\mu f^{\mu\nu} = 0. \tag{42}$$

Однако, введение скобок Дирака исключает самостоятельную роль этих уравнений и они становятся следствием гамильтоновых уравнений движения, порожденных гамильтонианом (41) и скобками (40).

5 Скалярное поле как пример источника гравитации

Разумеется, наш формализм будет неполным без демонстрации подключения материальных полей. Предположим, что взаимодействие этих полей с гравитацией является минимальным, тогда их плотность лагранжиана $\mathcal{L}_M$ будет зависеть от набора полей $\phi^A(X^\alpha)$, их первых производных по координатам пространства-времени и от метрики $g_{\mu\nu}(X^\alpha)$, преобразуясь как скалярная плотность при общих координатных преобразованиях. Приведение к гамильтонову виду действия полей материи выполняется согласно процедуре Кухаржа [3] и в результате дает

$$S_M = \int\limits_{t_1}^{t_2} dt \int\limits_{R^3} d^3x \left(\pi_A \phi^A_{,0} - \bar{N}\bar{\mathcal{H}}_M - \bar{N}^i \bar{\mathcal{H}}_{Mi}\right). \tag{43}$$

Объединение этого действия с действием гравитации (22) сводится к тому, что $\bar{\mathcal{H}}_M$ и $\bar{\mathcal{H}}_{Mi}$ просто добавляются к тем $\bar{\mathcal{H}}$ и $\bar{\mathcal{H}}_i$, которые раньше содержали только переменные гравитационного поля.

Для иллюстрации рассмотрим скалярное поле с плотностью лагранжиана

$$\mathcal{L}_M = -\sqrt{-g}\left(\frac{1}{2} g^{\mu\nu}\partial_\mu\phi\partial_\nu\phi + U(\phi)\right) \tag{44}$$

Переход к 3+1-обозначениям и преобразование Лежандра могут быть выполнены для скалярного поля независимо от чисто гравитационного вклада

$$\mathcal{L}_M = -N\sqrt{\eta}\left(f^{\perp\perp}\phi_{,\perp}\phi_{,\perp} + 2f^{\perp i}\phi_{,\perp}\phi_{,i} + \frac{1}{f^{\perp\perp}}\left(f^{\perp i}f^{\perp j} - \frac{\gamma\gamma^{ij}}{\eta}\right)\phi_{,i}\phi_{,j} + U(\phi)\right), \tag{45}$$

причем

$$\phi_{,0} = -N\phi_{,\perp} + N^i\phi_{,i}. \tag{46}$$

Импульс определяется обычным образом

$$\pi_\phi = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi_{,0}} = \sqrt{\eta}\left(f^{\perp\perp}\phi_{,\perp} - f^{\perp i}\phi_{,i}\right), \tag{47}$$

а скорость выражается через него по формуле

$$\phi_{,0} = -\frac{N}{f^{\perp\perp}\sqrt{\eta}}\pi_\phi + \left(N^i - N\frac{f^{\perp i}}{f^{\perp\perp}}\right)\phi_{,i}. \tag{48}$$

После соответствующего преобразования Лежандра действие скалярного поля принимает вид (43) где

$$\bar{\mathcal{H}}_M = \frac{1}{\sqrt{\gamma}}\left(\frac{\pi_\phi^2}{2} + \frac{1}{2}\gamma\gamma^{ij}\partial_i\phi\partial_j\phi + \gamma U(\phi)\right), \quad \bar{\mathcal{H}}_{Mi} = \pi_\phi\phi_{,i}. \tag{49}$$

Таким образом, объединяя действия для гравитационного и скалярного полей мы получим те же самые первичные связи (24), (25), что и в случае чистой гравитации, а полный гамильтониан, содержащий связи, будет иметь тот же вид (29). Процедура исключения связей также не меняется и окончательный гамильтониан сохраняет вид (41), причем теперь

$$\begin{aligned}
\bar{\mathcal{H}}_i &= -2\pi^j_{i|j} + \pi_\phi\phi_{,i}, \\
\bar{\mathcal{H}} &= \frac{1}{\sqrt{\gamma}}\left(-\frac{1}{\kappa}\gamma\tilde{R} + \kappa(\mathrm{Sp}\pi^2 - \frac{\pi^2}{2}) + \frac{\pi_\phi^2}{2} + \frac{1}{2}\gamma\gamma^{ij}\partial_i\phi\partial_j\phi + \gamma U(\phi)\right), \\
\{F,G\}_D &= \int\limits_{R^3} d^3x\left[\frac{\delta F}{\delta\gamma_{ij}}\frac{\delta G}{\delta\pi^{ij}} + \frac{\delta F}{\delta\phi}\frac{\delta G}{\delta\pi_\phi} - \frac{\delta F}{\delta\pi^{ij}}\frac{\delta G}{\delta\gamma_{ij}} - \frac{\delta F}{\delta\pi_\phi}\frac{\delta G}{\delta\phi}\right].
\end{aligned} \tag{50}$$

Нетрудно убедиться, что гамильтоновы уравнения движения для системы взаимодействующих скалярного и гравитационного полей имеют вид (для случая $U(\phi) = 1/2M^2\phi^2$):

$$
\begin{aligned}
\phi_{,0} &= \int\limits_{R^3} d^3x\Big(\bar{N}\{\phi, \bar{\mathcal{H}}\}_D + \bar{N}^k\{\phi, \bar{\mathcal{H}}_k\}_D\Big) \\
&= \bar{N}\frac{\pi_\phi}{\sqrt{\gamma}} + \bar{N}^i\phi_{,i}, \qquad (51) \\
\pi_{\phi,0} &= \int\limits_{R^3} d^3x\Big(\bar{N}\{\pi_\phi, \bar{\mathcal{H}}\}_D + \bar{N}^k\{\pi_\phi, \bar{\mathcal{H}}_k\}_D\Big) \\
&= (\bar{N}\sqrt{\gamma}\gamma^{ij}\partial_j\phi)_{,i} - \bar{N}\sqrt{\gamma}M^2\phi + (\bar{N}^i\pi_\phi)_{,i}, \qquad (52) \\
\gamma_{ij,0} &= \int\limits_{R^3} d^3x\Big(\bar{N}\{\gamma_{ij}, \bar{\mathcal{H}}\}_D + \bar{N}^k\{\gamma_{ij}, \bar{\mathcal{H}}_k\}_D\Big) \\
&= \bar{N}_{i|j} + \bar{N}_{j|i} + \kappa\frac{2\bar{N}}{\sqrt{\gamma}}(\pi_{ij} - \gamma_{ij}\frac{\pi}{2}), \qquad (53) \\
\pi^{ij}_{,0} &= \int\limits_{R^3} d^3x\Big(\{\pi^{ij}, \bar{N}\bar{\mathcal{H}}\}_D + \bar{N}^k\{\pi^{ij}, \bar{\mathcal{H}}_k\}_D\Big) \\
&+ \frac{m^2}{\kappa}\bar{N}\sqrt{\gamma}\left[\gamma^{ij} + \frac{1}{2}\eta_{kl}\left(\gamma^{ki}\gamma^{lj} - \gamma^{ij}\gamma^{kl}\right)\right] \\
&= -\frac{1}{2}\bar{N}\sqrt{\gamma}(\gamma^{ij}\gamma^{mn} - \gamma^{im}\gamma^{jn})\partial_m\phi\partial_n\phi - \frac{1}{2}\bar{N}\sqrt{\gamma}\gamma^{ij}M^2\phi^2 \\
&- \frac{1}{\kappa}\bar{N}\sqrt{\gamma}(R^{ij} - \gamma^{ij}R) + \kappa\frac{\bar{N}}{\sqrt{\gamma}}(\pi\pi^{ij} - 2\pi^{ik}\pi^j_k) \\
&+ \frac{1}{\kappa}\sqrt{\gamma}(\bar{N}^{|ij} - \gamma^{ij}\bar{N}^{|k}_{|k}) + (\pi^{ij}\bar{N}^k)_{|k} - \pi^{ik}\bar{N}^j_{|k} - \pi^{kj}\bar{N}^i_{|k} \\
&+ \frac{m^2}{\kappa}\bar{N}\sqrt{\gamma}\left[\gamma^{ij} + \frac{1}{2}\eta_{kl}\left(\gamma^{ki}\gamma^{lj} - \gamma^{ij}\gamma^{kl}\right)\right], \qquad (54)
\end{aligned}
$$

из которого очевидно, что отличие от соответствующих уравнений ОТО проявляется только в последнем уравнении и имеет порядок величины $O(m^2/\kappa)$. Зависимость величин $f^{\perp\perp}$, $f^{\perp i}$ от основных переменных (39), для которых выше были получены гамильтоновы уравнения, можно не учитывать при вычислении скобок Дирака в силу формул (37).

6 Группа Пуанкаре в гамильтоновом формализме РТГ

Среди всех вариантов гамильтоновой эволюции, разнообразие которых проистекает из произвола в выборе функций $N(x)$, $N^i(x)$ в гамильтониане (41), содержатся преобразования, сохраняющие метрику Минковского. Выбирая в качестве гиперповерхностей гиперплоскости и выбирая на них декартовы координаты, мы получаем на гиперплоскостях метрику η_{ij}, индуцированную метрикой Минковского (7), в простейшем виде $\eta_{ij} = \delta_{ij}$, а функции преобразований (15) в виде

$$N = A_k x^k + a, \quad N^i = A_{ik} x^k + a^i, \tag{55}$$

где

$$A_{ik} = -A_{ki}.$$

Тогда гамильтониан (41), ввиду его линейности по функциям $N(x)$, $N^i(x)$, примет вид

$$H = P^0 a - P^i a^i + M^k A_k + \frac{1}{2} M^{ik} A_{ik}, \tag{56}$$

где

$$P^0 = -\frac{m^2}{\kappa} \int \left(1 + f^{\perp\perp}\right) d^3x, \tag{57}$$

$$P_i = -\frac{m^2}{\kappa} \int f^{\perp i} d^3x \equiv -\int \mathcal{H}_i d^3x, \tag{58}$$

$$M^{ik} = -\frac{m^2}{\kappa} \int \left(x^i f^{\perp k} - x^k f^{\perp i}\right) d^3x \equiv \int \left(x^k \mathcal{H}_i - x^i \mathcal{H}_k\right) d^3x, \tag{59}$$

$$M^k = -\frac{m^2}{\kappa} \int x^k (1 + f^{\perp\perp}) d^3x. \tag{60}$$

Смысл этих операторов явствует из того, что все они являются частными случаями гамильтониана, соответствующими различному выбору преобразований координат, ими генерируемых: P^0 отвечает преобразованию сдвига по времени, P^i – пространственным трансляциям, M^{ik} – пространственным поворотам и M^k – бустам. Наши обозначения выбраны для удобства сравнения с аналогичными формулами работы [6], где рассматривалась алгебра Пуанкаре в асимптотически плоском пространстве ОТО.

Однако прежде, чем сводить гамильтониан к такому упрощенному виду, полезно получить алгебру скобок Дирака (50) для общих гамильтонианов. Пусть

$$\begin{aligned}
\mathrm{H} &= \int\limits_{R^3} d^3x \Big(N\mathcal{H} + N^i\mathcal{H}_i \\
&= \int\limits_{R^3} d^3x \Big(\bar{N}\bar{\mathcal{H}} + \bar{N}^i\bar{\mathcal{H}}_i \\
&+ \frac{m^2\sqrt{\eta}}{\kappa} N \left[-1 - \frac{f^{\perp\perp}}{2} + \frac{f^{\perp i} f^{\perp j}\eta_{ij}}{2f^{\perp\perp}} - \frac{1}{f^{\perp\perp}} \frac{\gamma}{\eta} \left(\frac{1}{2}\eta_{ij}\gamma^{ij} - 1 \right) \right] \Big), \qquad (61)
\end{aligned}$$

где мы считаем $f^{\perp\perp}$, $f^{\perp i}$ функциями, имеющими нулевые скобки Дирака. Это оправдано тем, что связи второго рода можно учитывать как до, так и после вычисления скобок Дирака. Таким образом, первая половина связей (24), (25) учитывается до, а вторая половина (38), (39) – после. Как обычно, при расчетах отбрасываются все поверхностные интегралы. Это оправдано для островных систем, где излучение допускается только во внутренней области, но не на бесконечности, а скорость стремления римановой метрики к плоской определяется юкавским поведением.

Результаты вычислений можно представить либо в виде, удобном для сравнения с аналогичной формулой ОТО:

$$\begin{aligned}
\{H(\alpha, \alpha^i), H(\beta, \beta^j)\} &= \int d^3x \Big[\bar{\lambda}\bar{\mathcal{H}} + \bar{\lambda}^k\bar{\mathcal{H}}_k + (\bar{\alpha}\bar{\beta}^k_{|k} - \bar{\beta}\bar{\alpha}^k_{|k})\bar{\mathcal{H}} \\
&- \frac{m^2}{\kappa}\sqrt{\gamma}\gamma_{k\ell}(\bar{\alpha}\bar{\beta}^{k|\ell} - \bar{\beta}\bar{\alpha}^{k|\ell})(2 - \eta_{mn}\gamma^{mn})) \\
&- \frac{m^2}{\kappa}\sqrt{\gamma}\eta_{k\ell}(\bar{\alpha}\bar{\beta}^{k|\ell} - \bar{\beta}\bar{\alpha}^{k|\ell}) \Big], \qquad (62) \\
\bar{\lambda} &= \bar{\alpha}^i\bar{\beta}_{,i} - \bar{\beta}^i\bar{\alpha}_{,i}, \qquad (63) \\
\bar{\lambda}^k &= \gamma^{k\ell}(\bar{\alpha}\bar{\beta}_{,\ell} - \bar{\beta}\bar{\alpha}_{,\ell}) + \bar{\alpha}^\ell\bar{\beta}^k_{,\ell} - \bar{\beta}^\ell\bar{\alpha}^k_{,\ell}, \qquad (64)
\end{aligned}$$

либо в виде, соответствующем теориям поля на фоне фиксированной метрики:

$$\begin{aligned}
\{H(\alpha, \alpha^i), H(\beta, \beta^j)\} &= H(\lambda, \lambda^k) + \int \frac{\partial\mathcal{H}}{\partial\eta_{ij}} \left(\alpha\mathcal{L}_{\vec{\beta}}\eta_{ij} - \beta\mathcal{L}_{\vec{\alpha}}\eta_{ij} \right) d^3x, \qquad (65) \\
\lambda &= \alpha^i\beta_{,i} - \beta^i\alpha_{,i}, \qquad (66) \\
\lambda^k &= \eta^{k\ell}(\alpha\beta_{,\ell} - \beta\alpha_{,\ell}) + \alpha^\ell\beta^k_{,\ell} - \beta^\ell\alpha^k_{,\ell}, \qquad (67)
\end{aligned}$$

где $\mathcal{L}_{\vec{\alpha}}\eta_{ij}$ – производная Ли от метрики η_{ij} по направлению векторного поля $\vec{\alpha}$. Отличия от ОТО проявляются в (62) как в членах, пропорциональных квадрату массы гравитона, так и в коэффициенте при $\bar{\mathcal{H}}$. Последнее связано с тем, что коэффициент при $\bar{\mathcal{H}}$, т.е. функция $\bar{N}$, пропорционален $\sqrt{\gamma}$. Соотношения (62), таким образом, не представляют собой известную алгебру деформаций гиперповерхности [5],[6], т.к. функции $\bar{N}$, $\bar{N}^i$ не являются ее параметрами.

Подстановка в соотношения (65) вместо произвольных функций α, α^i, β, β^j выражений вида (55), отвечающих преобразованиям Пуанкаре, приводит к соотношениям алгебры Пуанкаре для скобок Дирака:

$$\begin{aligned}
\{P^0, P_i\}_D &= 0, \quad \{P_i, P_j\}_D = 0, && (68)\\
\{P^0, M^{ik}\}_D &= 0, \quad \{P_i, M^{jk}\}_D = \delta_{ik}P_j - \delta_{ij}P_k, && (69)\\
\{M^{ij}, M^{k\ell}\}_D &= \delta_{ik}M^{j\ell} - \delta_{i\ell}M^{jk} + \delta_{j\ell}M^{ik} - \delta_{jk}M^{i\ell}, && (70)\\
\{P^0, M^i\}_D &= -P^i, \quad \{P_i, M^j\}_D = -\delta_{ij}(P^0 - c^0), && (71)\\
\{M^k, M^{ij}\}_D &= \delta_{kj}(M^i - c^i) - \delta_{ki}(M^j - c^j), \quad \{M^i, M^j\}_D = -M^{ij} && (72)
\end{aligned}$$

Аддитивные вклады $c^0 = m^2/\kappa \int d^3x$ и $c^i = m^2/\kappa \int x^i d^3x$ в P_0 и M^i, не зависящие от канонических переменных и выражаюшиеся расходящимися интегралами по всему пространству, играют роль центральных зарядов в канонической реализации алгебры Пуанкаре и отвечают классической перенормировке энергии вакуума. Они возникают вследствие желания обеспечить строго нулевую плотность энергии для пустого пространства Минковского. С этой целью в гамильтониан (и в лагранжиан) включается член нулевого порядка по физическому полю. В то же время линейные по физическому полю члены, как в лагранжиане, так и в гамильтониане, появляются только в виде полных производных и не дают вклада в уравнения движения.

7 Заключение

Попытаемся теперь резюмировать, в чем состоит сходство и в чем различие между РТГ и ОТО при формулировке на языке гамильтонова формализма.

Мы видим, что канонические переменные и их скобки в обеих теориях совпадают, однако, гамильтонианы отличаются. Различие во внешнем виде гамильтонианов оказывается, однако, не самым существенным и, действуя формально, его можно свести к минимуму, переписав формулу (41) в виде (61), куда требуется подставлять выражения для $f^{\perp\perp}, f^{\perp i}$ из соотношений (38), (39) после вычисления скобок Дирака. Более важным является то обстоятельство, что одни и те же величины $\bar{\mathcal{H}}, \bar{\mathcal{H}}_i$ в ОТО должны обращаться в нуль на любых решениях уравнений движения, а в РТГ это требование отсутствует.

Это различие ведет к тому, что число степеней свободы в теориях не совпадает. В РТГ мы имеем 6 чисто гравитационных степеней свободы на точку пространства, не считая обычного числа степеней свободы полей материи (для скалярного поля это число, очевидно, равно 1). В ОТО из числа 6 мы должны вычесть количество связей первого рода, $6 - 4 = 2$, т.е. получаем только две степени свободы.

Отсутствие связей первого рода приводит к тому, что гамильтонианы РТГ, в частности, генераторы группы Пуанкаре, не сводятся к поверхностным интегралам на решениях уравнений движения, в отличие от гамильтонианов ОТО. Таким образом, в рамках РТГ определена плотность энергии-импульса и других интегралов движения.

Вопрос о знаке плотности энергии в полученном выражении (57) требует дополнительного изучения. В линеаризованном приближении, с точностью до пространственной дивергенции, плотность энергии является знакопеременной квадратичной формой. Однако существенное значение, конечно, имеет только полная теория. Если бы в этой теории существовала патология в виде отрицательного потока энергии от скалярной компоненты, то она проявлялась бы, например, в виде излучения сферических волн. Но в работе [7] было показано, что излучение скалярной компоненты гравитационного поля в сферически симметричном случае отсутствует и внешнее поле является исключительно статическим.

Вопросы канонического квантования мы надеемся рассмотреть в следующих работах.

Список литературы

[1] Логунов А.А. Релятивистская теория гравитации. М.: Наука, 2006.

[2] Соловьев В.О. Канонический формализм для релятивистской теории гравитации. Проблемы физики высоких энергий и теории поля:

Труды IX Семинара, Протвино, 7-13 июля 1986 г. М.: Наука, 1987, сс. 24-33.

[3] Kuchař K. J. Math. Phys. v.17 (1977) 777-791; 792-800; 801-820; 18 (1978) 1589-1597.

[4] Соловьев В.О. ЭЧАЯ т.19 (1988) 1115-1153.

[5] Dirac P.A.M. Lectures on Quantum Mechanics. Yeshiva Univ., N.Y., 1964. (Имеется перевод: П.А.М. Дирак. Лекции по квантовой механике. М.: Мир, 1968)

[6] Regge T., Teitelboim C. Ann. of Phys. v.88 (1974) 286-318.

[7] Логунов А.А., Мествиришвили М.А. ЭЧАЯ т.40 (2009) 136-143.