ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА

Подход Хартри–Фока к динамическому возникновению массы фермиона в (2+1)–мерной модели Тирринга

М. М. Губаева,[1] Р. Н. Жохов,[2] К. Г. Клименко,[1,3,a] Т. Г. Хунджуа[4]

[1] *Университет «Дубна» (филиал «Протвино»). Россия, 142281, Московская обл., Протвино*
[2] *Институт Земного магнетизма, ионосферы и распространения радиоволн им. Н.В. Пушкова. Россия, 142092, Московская обл., Троицк*
[3] *«Государственный научный центр Российской Федерации — Институт физики высоких энергий» Национального исследовательского центра «Курчатовский институт» Россия, 142281, Московская обл., Протвино*
[4] *Институт математики им. А. Размадзе, Грузинская академия наук, отделение теоретической физики. Грузия, GE-0193, Тбилиси*

Поступила в редакцию 31.03.2022, после доработки 17.05.2022, принята к публикации 21.05.2022.

Методом Хартри–Фока исследована (2+1)-мерная безмассовая модель Тирринга с 4–компонентными ферми–полями. Показано, что ее основное состояние — смешанная фаза, состоящая из фазы, в которой возникающая динамически масса фермиона нарушает спонтанно киральную инвариантность модели, а также фазы с массой ферми–частиц, нарушающей $\mathcal{P}$ четность. При этом установлено, что динамическая генерация массы фермиона возможна при любом конечном числе ферми–полей.

Ключевые слова: (2+1)-мерная модель Тирринга, уравнение Хартри–Фока, динамическая генерация массы.
УДК: 530.145. PACS: 11.10.Kk, 04.60.Kz.

ВВЕДЕНИЕ

В течение нескольких последних десятилетий в квантовой теории поля большое внимание уделяется изучению различных моделей в (2+1)-мерном пространстве–времени. Связано это с тем, что в физике конденсированного состояния наблюдается довольно много явлений (квантовый эффект Холла, высокотемпературная сверхпроводимость, физические процессы в графене и т.д.), имеющих планарную природу, для описания которых удобно использовать релятивистские (2+1)-мерные модели с четырехфермионным взаимодействием. Среди них модель Гросса–Неве (ГН) [1–6], модель Тирринга [7–13] и т.д. При этом различные непертурбативные подходы (метод $1/N$ разложения [14], методы Гауссова эффективного потенциала и оптимального разложения [15, 16] и т.д.) к изучению безмассовой (2+1)-мерной модели ГН предсказывают качественно одинаковые ее свойства. А именно, динамическую, т.е. непертурбативную, генерацию массы фермиона, приводящую к спонтанному нарушению киральной симметрии; существование нетривиальной ультрафиолетово стабильной константы связи, и т.д.). Однако использование тех же самых методов для изучения безмассовой (2+1)-мерной модели Тирринга, построенной на основе 4–компонентного приводимого спинорного представления для фермионных полей, приводит к противоречивым результатам. Действительно, в ряде работ (см., например, [8, 9]) эта модель была исследована методом $1/N$ разложения, где было показано, что в ней динамически может возникнуть только масса фермиона, нарушающая киральную симметрию (при этом пространственная четность $\mathcal{P}$ остается ненарушенной). Наоборот, использование других методов исследования [11–13] той же самой модели Тирринга дает противоположный результат, т.к. в этих работах предсказывается возможность возникновения $\mathcal{P}$-нечетной (но кирально инвариантной) массы фермионов. Кроме того, в литературе существует и расхождение в предсказаниях количества ферми–полей N, при которых возможна динамическая генерация массы. Так, в первой из работ [8, 9] этот эффект возможен при любом значении N, а во второй — только при $N < N_c = 128/3\pi^2$ и т.д. Такое противоречие в результатах указывает на необходимость дальнейшего более тщательного изучения трехмерной модели Тирринга как в рамках хорошо известных методов, так и с помощью новых подходов.

С этой целью в предлагаемой работе мы используем так называемый подход Хартри — Фока (ХФ) к исследованию возможности динамической генерации массы фермиона в трехмерной модели Тирринга.[1] Ранее в работах [23, 24] мы применили его для изучения (2+1)-мерной модели ГН. При этом оказалось, что в области больших N метод ХФ предсказывает те же свойства модели ГН, что и широко используемый для изучения этой модели непертурбативный метод $1/N$-разложения (см., например, [5]). В области малых N, где метод $1/N$-разложения неприменим, подход ХФ предсказывает существование других нетривиальных фаз

[a] E-mail: kklim@ihep.ru

[1] Исходно метод ХФ был разработан как нулевое приближение основного состояния при построении квантовой теории многих частиц (см., например, [17]). Впоследствии он был обобщен и на различные квантовополевые модели [18–20]. Его также используют и для описания релятивистских систем типа нейтронных звезд [21, 22] и т.д.

модели ГН. Суть метода ХФ заключается, во-первых, в использовании эффективного действия Корнвала–Джакива–Томбоулиса (КДТ) для композитных операторов $\Gamma(S)$ в моделях теории поля с четырехфермионным взаимодействием (здесь S — полный фермионный пропагатор, удовлетворяющий уравнению стационарности $\delta\Gamma/\delta S = 0$) и, во-вторых, в том, что рассмотрение $\Gamma(S)$ производится в первом порядке по константе связи [18]. Полученное в результате этого уравнение стационарности принимает вид хорошо известного уравнения Хартри–Фока для массового оператора фермиона [21].

В нашей работе на основе подхода ХФ показано, что основное состояние безмассовой (2+1)-мерной модели Тирринга есть на самом деле смешанная фаза, состоящая из кирально-нарушенной фазы и фазы, в которой фермионы имеют массу, нарушающую $\mathcal{P}$ четность. При этом установлено, что динамическая генерация массы фермиона возможна при любом конечном значении N.

1. МОДЕЛЬ ТИРРИНГА И ПРИБЛИЖЕНИЕ ХАРТРИ–ФОКА

1.1. Модель, ее симметрии и т.д.

Лагранжиан трехмерной модели Тирринга имеет вид (см., например, в [9])

$$L = \overline{\Psi}_k \gamma^\nu i\partial_\nu \Psi_k - \frac{G}{2N}\left(\overline{\Psi}_k \gamma^\mu \Psi_k\right)\left(\overline{\Psi}_l \gamma_\mu \Psi_l\right), \quad (1)$$

где при каждом фиксированном $k = 1, ..., N$ поле $\Psi_k \equiv \Psi_k(t,x,y)$ преобразуется по (приводимому) четырехмерному спинорному представлению (2+1)-мерной группы Лоренца (спинорные индексы в (1) явно не указаны), γ^ν $(\nu = 0,1,2)$ — матрицы размерности 4×4, действующие в этом спинорном пространстве (алгебра γ-матриц и их вид представлены в Приложении, где также приведены другие используемые в статье матрицы γ^3, γ^5 и τ). Отметим также, что в (1) и ниже суммирование по повторяющимся k, l и μ, ν индексам подразумевается. Константа связи G имеет размерность $[\text{масса}]^{-1}$.

В совокупности все поля Ψ_k образуют фундаментальный мультиплет группы $U(N)$, поэтому инвариантность лагранжиана (1) относительно этой группы очевидна. Не столь очевиден факт, что на самом деле непрерывная группа симметрии трехмерной модели Тирринга шире и есть $U(2N)$. Это нетрудно установить, если переписать выражение (1) в терминах двухкомпонентных спиноров. А именно, при каждом фиксированном $k = 1, ..., N$ положим $\Psi_k^T = (\psi_{2k-1}^T, \psi_{2k}^T)$, где символ T означает операцию транспонирования, а ψ_{2k-1} и ψ_{2k} — двухкомпонентные спиноры (см. Приложение). Тогда имеем:

$$\begin{aligned} L_0 \equiv \overline{\Psi}_k \gamma^\nu i\partial_\nu \Psi_k &= \overline{\psi}_1 \tilde{\gamma}^\nu i\partial_\nu \psi_1 + \overline{\psi}_2 \tilde{\gamma}^\nu i\partial_\nu \psi_2 + \cdots \\ &\cdots + \overline{\psi}_{2N} \tilde{\gamma}^\nu i\partial_\nu \psi_{2N}, \\ \overline{\Psi}_k \gamma^\nu \Psi_k &= \overline{\psi}_1 \tilde{\gamma}^\nu \psi_1 + \overline{\psi}_2 \tilde{\gamma}^\nu \psi_2 + \cdots + \overline{\psi}_{2N} \tilde{\gamma}^\nu \psi_{2N}, \end{aligned} \quad (2)$$

где $\tilde{\gamma}^\nu$ — матрицы размерности 2×2 (см. Приложение). Предполагая формально, что совокупность всех двухкомпонентных спиноров ψ_{2k-1} и ψ_{2k} $(k = 1, .., N)$ образует фундаментальное представление группы $U(2N)$, нетрудно видеть, что как структуры (2), так и целиком весь лагранжиан (1) инвариантны относительно этой группы.

Кроме того, безмассовая модель Тирринга обладает рядом дискретных симметрий. Мы рассмотрим только три из них. Первые две называются киральными симметриями и определяются следующими преобразованиями [4, 5]:

$$\begin{aligned} \Gamma^5: \quad & \Psi_k(t,x,y) \to \gamma^5 \Psi_k(t,x,y); \\ & \overline{\Psi}_k(t,x,y) \to -\overline{\Psi}_k(t,x,y)\gamma^5, \\ \Gamma^3: \quad & \Psi_k(t,x,y) \to \gamma^3 \Psi_k(t,x,y); \\ & \overline{\Psi}_k(t,x,y) \to -\overline{\Psi}_k(t,x,y)\gamma^3. \end{aligned} \quad (3)$$

Оставшаяся дискретная симметрия называется пространственным отражением, или $\mathcal{P}$-четностью, относительно которой $(t,x,y) \to (t,-x,y)$ [2], а преобразование ферми–полей имеет вид

$$\begin{aligned} \mathcal{P}: \quad & \Psi_k(t,x,y) \to \gamma^5\gamma^1 \Psi_k(t,-x,y); \\ & \overline{\Psi}_k(t,x,y) \to \overline{\Psi}_k(t,-x,y)\gamma^5\gamma^1. \end{aligned} \quad (4)$$

Благодаря симметрии безмассовой модели Тирринга (1) относительно каждого из дискретных преобразований Γ^5, Γ^3 и $\mathcal{P}$ (а также преобразований из $U(2N)$ группы), различные массовые члены не могут возникнуть в этой модели в рамках обычной теории возмущений. Действительно, один из наиболее известных массовых членов (суммирование по k подразумевается) имеет вид $m_D\overline{\Psi}_k\Psi_k = m_D(\overline{\psi}_{2k-1}\psi_{2k-1} - \overline{\psi}_{2k}\psi_{2k})$ (мы называем m_D массой Дирака). Но массовый член Дирака не может возникнуть в модели (1) в силу того, что он нарушает как киральные симметрии Γ^5 и Γ^3, так и $U(2N)$–инвариантность этой модели (хотя он инвариантен относительно $\mathcal{P}$ преобразований). Также по соображениям симметрии в данной модели невозможно возникновение и так называемого масового члена Халдане[3] $m_H\overline{\Psi}_k\tau\Psi_k = m_H(\overline{\psi}_{2k-1}\psi_{2k-1} + \overline{\psi}_{2k}\psi_{2k})$ при использовании обычной теории возмущений (здесь $\tau = -i\gamma^3\gamma^5 = diag(1,1,-1,-1)$ — матрица в 4–мерном спинорном пространстве, представленная в Приложении). Это видно из того, что массовый член Халдане не симметричен относительно $\mathcal{P}$–четности (хотя он инвариантен относительно $U(2N)$ и киральных преобразований (3)) и т.д.

Тем не менее в рамках непертурбативных приближений (например, в $1/N$ разложении) различные массы фермионов могут возникать в модели динамически, нарушая тем самым исходную симметрию спонтанным образом. В данной работе продолжается исследование (2+1)-мерных моделей с четырехфермионным взаимодействием, начатое

[2] В 2+1 измерении пространственное отражение соответствует обращению только одной из двух пространственных осей координат [1, 25], так как обращение сразу двух осей эквивалентно повороту системы координат на угол π.

[3] Благодаря массовому члену Халдане, в (2+1)-мерных теориях у калибровочных полей динамическим образом генерируется топологическая масса Черна–Саймонса, связанная с квантовым эффектом Холла, высокотемпературной сверхпроводимостью [5, 26] и т.д.

в работах [23, 24], с помощью так называемого подхода ХФ, который мы используем уже в трехмерной модели Тирринга. Его теоретической основой является эффективное действие Корнвала–Джакива–Томбоулиса (КДТ) [18] для композитных операторов.

1.2. КДТ эффективное действие и подход ХФ

Давайте рассмотрим $Z(K)$–производящий функционал функций Грина билокальных фермион–антифермионных композитных операторов вида $\sum_{k=1}^N \overline{\Psi}_k^\alpha(x)\Psi_{k\beta}(y)$ в рамках (2+1)-мерной модели Тирринга (1) (соответствующая техника для произвольных четырехфермионных теорий разработана в деталях в [27]),

$$Z(K) \equiv \exp(iNW(K)) = \\ = \int \mathcal{D}\overline{\Psi}_k\mathcal{D}\Psi_k \exp\Big(i\Big[I(\overline{\Psi},\Psi)+ \\ + \int d^3xd^3y\overline{\Psi}_k^\alpha(x)K_\alpha^\beta(x,y)\Psi_{k\beta}(y)\Big]\Big), \quad (5)$$

где $\alpha,\beta = 1,2,3,4$ спинорные индексы, $K_\alpha^\beta(x,y)$ — билокальный источник билокального фермион-антифермионного композитного поля $\bar\Psi_k^\alpha(x)\Psi_{k\beta}(y)$ (напомним, что во всех выражениях суммирование по повторяющимся индексам подразумевается).[4] Кроме того, $I(\bar\Psi,\Psi) = \int Ld^3x$, где L — лагранжиан (1). Следовательно,

$$I(\overline{\Psi},\Psi)=\int d^3xd^3y\overline{\Psi}_k^\alpha(x)D_\alpha^\beta(x,y)\Psi_{k\beta}(y)+I_{int}(\overline{\Psi}_k^\alpha\Psi_{k\beta}),\\ D_\alpha^\beta(x,y) = (\gamma^\nu)_\alpha^\beta\, i\partial_\nu\delta^3(x-y),\\ I_{int} = -\frac{G}{2N}\int d^3x\left(\overline{\Psi}_k\gamma^\mu\Psi_k\right)\left(\overline{\Psi}_l\gamma_\mu\Psi_l\right) = \\ = -\frac{G}{2N}\int d^3xd^3td^3ud^3v\delta^3(x-t)\delta^3(t-u)\delta^3(u-v)\times \\ \times\overline{\Psi}_k^\alpha(x)(\gamma^\mu)_\alpha^\beta\Psi_{k\beta}(t)\overline{\Psi}_l^\rho(u)(\gamma_\mu)_\rho^\xi\Psi_{l\xi}(v). \quad (6)$$

Отметим, что в (6) и во всех подобных выражениях ниже, $\delta^3(x-y)$ обозначает трехмерную дельта-функцию Дирака. Для производящего функционала $Z(K)$ (5) есть альтернативное выражение,

$$\exp(iNW(K)) = \exp\Big(iI_{int}\Big(-i\frac{\delta}{\delta K}\Big)\Big)\int\mathcal{D}\overline{\Psi}_k\mathcal{D}\Psi_k\exp\Big(i\int d^3xd^3y\overline{\Psi}_k(x)\Big[D(x,y)+ \\ +K(x,y)\Big]\Psi_k(y)\Big) = \exp\Big(iI_{int}\Big(-i\frac{\delta}{\delta K}\Big)\Big)\Big[\det\big(D(x,y)+K(x,y)\big)\Big]^N = \\ = \exp\Big(iI_{int}\Big(-i\frac{\delta}{\delta K}\Big)\Big)\exp\Big[N\mathrm{Tr}\ln\big(D(x,y)+K(x,y)\big)\Big], \quad (7)$$

в котором вместо каждой билинейной конструкции $\bar\Psi_k^\alpha(s)\Psi_{k\beta}(t)$, присутствующей в I_{int} (6), мы использовали вариационную производную $-i\delta/\delta K_\alpha^\beta(s,t)$. Кроме того, символ Tr в (7) означает след оператора или матрицы как по спинорным индексам, так и по пространственно-временным координатам. Эффективное КДТ действие для композитного билокального и биспинорного оператора $\bar\Psi_k^\alpha(x)\Psi_{k\beta}(y)$ определяется как производящий функционал $\Gamma(S)$ (где $S_\beta^\alpha(x,y)$ — полный фермионный пропагатор), который получается преобразованием Лежандра из производящего функционала $W(K)$ (см. (5) или (7)),

$$\Gamma(S) = W(K) - \int d^3xd^3yS_\beta^\alpha(x,y)K_\alpha^\beta(y,x), \quad (8)$$

где

$$S_\beta^\alpha(x,y) = \frac{\delta W(K)}{\delta K_\alpha^\beta(y,x)}. \quad (9)$$

Принимая во внимание соотношение (5), понимаем, что величина $S(x,y)$, определенная в (9), становится полным фермионным пропагатором модели (1) при $K(x,y) = 0$. Следовательно, для построения КДТ эффективного действия $\Gamma(S)$, определенного формулой (8), необходимо решить уравнение (9) относительно K, а затем подставить полученное решение в выражение (8). Из определения (8)–(9) ясно, что

$$\frac{\delta\Gamma(S)}{\delta S_\beta^\alpha(x,y)} = \int d^3ud^3v\frac{\delta W(K)}{\delta K_\nu^\mu(u,v)}\frac{\delta K_\nu^\mu(u,v)}{\delta S_\beta^\alpha(x,y)} - \\ - K_\alpha^\beta(y,x) - \int d^3ud^3vS_\mu^\nu(v,u)\frac{\delta K_\nu^\mu(u,v)}{\delta S_\beta^\alpha(x,y)}. \quad (10)$$

(Как в равенстве (10), так и ниже греческие буквы α,β,μ,ν и т.д. обозначают спинорные индексы.) Отсюда с помощью соотношения (9) видно, что первое слагаемое из (10) сокращается с последним. Поэтому

$$\frac{\delta\Gamma(S)}{\delta S_\beta^\alpha(x,y)} = -K_\alpha^\beta(y,x). \quad (11)$$

Следовательно, в истинной модели Тирринга, в которой билокальный источник $K_\alpha^\beta(y,x)$ равен нулю, полный фермионный пропагатор является решением следующего уравнения стационарности

$$\frac{\delta\Gamma(S)}{\delta S_\beta^\alpha(x,y)} = 0. \quad (12)$$

В дальнейшем для того, чтобы упростить вычисления и получить конкретную информацию о фазовой

[4] Матричный элемент любой матрицы или оператора $\hat A$, действующего в четырехмерном спинорном пространстве, мы обозначаем как A_β^α, где верхний (нижний) индекс есть номер столбца (строки) матрицы $\hat A$. В частности, матричные элементы любой матрицы γ^μ обозначаются как $(\gamma^\mu)_\beta^\alpha$.

структуре модели, мы вычисляем КДТ эффективное действие (8) вплоть до первого порядка по константе связи G. В этом случае (похожие подробные вычисления приведены в arXiv-версии работы [23], посвященной свойствам ГН модели)

$$\Gamma(S) = i\mathrm{Tr}\ln\left(iS\right) + \int d^3x d^3y S^\alpha_\beta(x,y) D^\beta_\alpha(y,x) - \\ - \frac{G}{2}\int d^3s \mathrm{tr}\big[\gamma^\rho S(s,s)\big]\mathrm{tr}\big[\gamma_\rho S(s,s)\big] + \\ + \frac{G}{2N}\int d^3s\ \mathrm{tr}\Big[\gamma^\rho S(s,s)\gamma_\rho S(s,s)\Big]. \quad (13)$$

Отметим, что здесь символ Tr имеет такой же смысл, что и в соотношении (7), но символ tr означает след оператора только по спинорным индексам. Оператор $D(x,y)$ определен одним из равенств (6). Уравнение стационарности (12) для КДТ эффективного действия (13) имеет вид

$$-i\Big[S^{-1}\Big]^\beta_\alpha(x,y) - D^\beta_\alpha(x,y) = \\ = -G(\gamma^\rho)^\beta_\alpha \mathrm{tr}\big[\gamma_\rho S(x,y)\big]\delta^3(x-y) + \\ + \frac{G}{N}\big[\gamma^\rho S(x,y)\gamma_\rho\big]^\beta_\alpha \delta^3(x-y). \quad (14)$$

Далее предположим, что $S(x,y)$ — трансляционно-инвариантный оператор. Тогда

$$S^\beta_\alpha(x,y) \equiv S^\beta_\alpha(z) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3}\overline{S^\beta_\alpha}(p)e^{-ipz}, \\ \overline{S^\beta_\alpha}(p) = \int d^3z S^\beta_\alpha(z)e^{ipz}, \\ \Big(S^{-1}\Big)^\beta_\alpha(x,y) \equiv \Big(S^{-1}\Big)^\beta_\alpha(z) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3}\overline{(S^{-1})^\beta_\alpha}(p)e^{-ipz}, \quad (15)$$

где $z = x - y$, а $\overline{S^\beta_\alpha}(p)$ есть преобразование Фурье функции $S^\beta_\alpha(z)$. В терминах фурье-преобразованных величин уравнение стационарности (14) принимает вид

$$-i\overline{(S^{-1})^\beta_\alpha}(p) - (\hat{p})^\beta_\alpha = -G(\gamma^\rho)^\beta_\alpha \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3}\ \mathrm{tr}\big[\gamma_\rho \overline{S}(q)\big] + \\ + \frac{G}{N}\int \frac{d^3q}{(2\pi)^3}\ \big[\gamma^\rho \overline{S}(q)\gamma_\rho\big]^\beta_\alpha, \quad (16)$$

где $\hat{p} = p_\nu\gamma^\nu$. Отождествляя левую часть этого равенства с массовым оператором фермиона $\Sigma(p)$, мы видим, что уравнение (16) есть не что иное, как уравнение Хартри–Фока для пропагатора фермиона $\overline{S}(p)$ в модели Тирринга. При этом первый член в правой части (16) является вкладом Хартри, а второй член — вкладом Фока в массовый оператор $\Sigma(p)$. Отметим, что для теорий поля с четырехфермионным взаимодействием уравнение ХФ в самом общем случае, т.е. с учетом различных каналов взаимодействия, приведено в гл. 4.3.1 обзора [21].

Таким образом, мы показали, что непертурбативный подход ХФ к нахождению массы фермиона в четырехфермионных моделях является частным случаем более общего подхода, основанного на КДТ эффективном действии для композитных операторов.

И последнее замечание. Нетрудно видеть, что как КДТ эффективное действие (13), так и уравнение ХФ (16) содержат ультрафиолетовые (УФ) расходимости, а также голую константу связи G. Так как (2+1)-мерная модель Тирринга перенормируема [28], то в дальнейшем мы собираемся получить перенормированные выражения как для $\Gamma(S)$, так и для уравнения ХФ. Его нетривиальные конечные решения будут соответствовать массе фермиона, которая возникает в модели динамически.

2. УРАВНЕНИЕ ХФ ДЛЯ МАСС ДИРАКА И ХАЛДАНЕ

Исследуем возможность динамической генерации массового члена вида $\overline{\Psi}_k(m_D + m_H\tau)\Psi_k$ в безмассовой модели Тиринга (1). С этой целью мы должны доказать существование решения уравнения ХФ (16) вида

$$\overline{S}(p) = -i\left(\hat{p} + m_D + m_H\tau\right)^{-1} = \\ = -i\begin{pmatrix} \tilde{p} + m_D + m_H, & 0 \\ 0\ \ , & -\tilde{p} + m_D - m_H[-2pt] \end{pmatrix}^{-1} = \\ = -i\begin{pmatrix} \frac{\tilde{p}-m_D-m_H}{p^2-(m_D+m_H)^2}, & 0 \\ 0\ \ , & \frac{-\tilde{p}-m_D+m_H}{p^2-(m_D-m_H)^2}[-2pt] \end{pmatrix}, \quad (17)$$

где m_D и m_H — неизвестные (конечные) величины. В соотношениях (17) 4×4 матрица $\overline{S}(p)$ представлена в виде 2×2 матрицы, каждый элемент которой также есть 2×2 матрица. Кроме того, $\tilde{p} = \tilde{\gamma}^\nu p_\nu$, где $\tilde{\gamma}^\nu$ $(\nu = 0,1,2)$ есть 2×2 матрица Дирака (см. Приложение). Очевидно, что в этом случае $\overline{S^{-1}}(p) = i(\hat{p} + m_D + \tau m_H)$. Используя выражение (17) в уравнении ХФ (16), мы получаем для m_D и m_H следующую *неперенормированную* систему уравнений

$$m_D = \frac{3iG}{2N}\int \frac{d^3p}{(2\pi)^3}\left\{\frac{m_D+m_H}{p^2-(m_D+m_H)^2} + \frac{m_D-m_H}{p^2-(m_D-m_H)^2}\right\}, \\ m_H = \frac{3iG}{2N}\int \frac{d^3p}{(2\pi)^3}\left\{\frac{m_D+m_H}{p^2-(m_D+m_H)^2} - \frac{m_D-m_H}{p^2-(m_D-m_H)^2}\right\}. \quad (18)$$

Осуществляя в (18) Виков поворот, $p_0 \to ip_0$, а затем переходя в полученном евклидовом пространстве энергии-импульсов, по которым идет интегрирование, к сферическим координатам, мы получим (после интегрирования по сферическим углам) следующую *регуляризованную* систему уравнений, где Λ — параметр обрезания:

$$\begin{aligned} m_D &= \frac{3G}{2N}\int_0^\Lambda \frac{p^2\,dp}{2\pi^2}\left\{\frac{m_D+m_H}{p^2+(m_D+m_H)^2}+\frac{m_D-m_H}{p^2+(m_D-m_H)^2}\right\},\\ m_H &= \frac{3G}{2N}\int_0^\Lambda \frac{p^2\,dp}{2\pi^2}\left\{\frac{m_D+m_H}{p^2+(m_D+m_H)^2}-\frac{m_D-m_H}{p^2+(m_D-m_H)^2}\right\}. \end{aligned} \tag{19}$$

Так как

$$\int_0^\Lambda \frac{p^2}{p^2+M^2}dp = \Lambda - \frac{\pi}{2}|M| + M\mathcal{O}\left(\frac{M}{\Lambda}\right), \tag{20}$$

то система уравнений (19) может быть представлена в виде

$$\begin{aligned} \frac{m_D}{A} &= 2m_D\Lambda - \frac{\pi}{2}\big[(m_D+m_H)|m_D+m_H|+\\ &\quad +(m_D-m_H)|m_D-m_H|\big]+\cdots,\\ \frac{m_H}{A} &= 2m_H\Lambda - \frac{\pi}{2}\big[(m_D+m_H)|m_D+m_H|-\\ &\quad -(m_D-m_H)|m_D-m_H|\big]+\cdots, \end{aligned} \tag{21}$$

где $A = \frac{3G}{4N\pi^2}$, а многоточия означают слагаемые порядка $1/\Lambda$ и выше. Для того, чтобы устранить УФ расходимости из системы (21), мы предполагаем, что голая константа связи $G \equiv G(\Lambda)$ имеет такую Λ–зависимость, что

$$\frac{1}{A} \equiv \frac{4N\pi^2}{3G(\Lambda)} = 2\Lambda + \frac{\pi}{2}g + g\mathcal{O}\left(\frac{g}{\Lambda}\right), \tag{22}$$

где g — некоторый конечный Λ-независимый параметр, имеющий размерность массы. Отсюда, в частности, следует, что при $\Lambda\to\infty$

$$G \equiv G(\Lambda) = \frac{2\pi^2 N}{3\Lambda} - \frac{\pi^3 Ng}{6\Lambda^2} + \cdots. \tag{23}$$

Кроме того, в пределе больших Λ система уравнений ХФ (21) принимает при такой зависимости G от Λ следующую *перенормированную* форму:

$$\begin{aligned} m_D g &+ (m_D+m_H)|m_D+m_H|+\\ &+(m_D-m_H)|m_D-m_H| = 0,\\ m_H g &+ (m_D+m_H)|m_D+m_H|-\\ &-(m_D-m_H)|m_D-m_H| = 0. \end{aligned} \tag{24}$$

3. ДИНАМИЧЕСКАЯ ГЕНЕРАЦИЯ МАСС ДИРАКА И ХАЛДАНЕ

Перенормированная система уравнений ХФ (24) для m_D и m_H имеет несколько решений. И для того, чтобы выбрать наиболее предпочтительное из них, необходимо ввести КДТ эффективный *потенциал* $V(S)$, который связан с КДТ эффективным действием $\Gamma(S)$ (13) соотношением [18]

$$V(S)\int d^3x \equiv -\Gamma(S)\Big|_{\text{transl.}-\text{inv. S(x,y)}}, \tag{25}$$

где $S(x,y)$ есть трансляционно-инвариантная функция, т.е. $S(x,y)\equiv S(x-y)$, как это и предполагается в выражениях (16) и (17). Очевидно, что для произвольных значений голой константы связи G эффективный потенциал (25) есть УФ-расходящаяся величина. Однако, если G подчинена соотношению (23), то все УФ расходимости $V(S)$ сокращаются, и для фермионного пропагатора вида (17) он принимает вид

$$\begin{aligned} V(S) &\equiv V(m_D,m_H) =\\ &= \frac{1}{12\pi}\Big(3gm_D^2+3gm_H^2+2|m_D+m_H|^3+2|m_D-m_H|^3\Big). \end{aligned} \tag{26}$$

(Это выражение справедливо с точностью до несущественной бесконечной константы, независимой от m_D и m_H.) Кроме того, нетрудно проверить, что уравнения (24) являются системой уравнений стационарности для эффективного потенциала (26). По своему физическому смыслу эффективный потенциал есть плотность свободной энергии системы. Очевидно, что если система находится в стабильном состоянии, то ее свободная энергия должна быть минимальной. Отсюда следует, что то из решений системы уравнений ХФ (24), на котором функция $V(m_D,m_H)$ достигает наименьшего значения, и определяет значения масс m_D и m_H, возникающих в (2+1)-мерной модели Тирринга динамически.

Для упрощения задачи по поиску наименьшего значения функции $V(m_D,m_H)$ воспользуемся ее свойствами симметрии. Так как она остается инвариантной при одном из преобразований: $m_D\to -m_D$, $m_H\to -m_H$ или $m_H\leftrightarrow m_D$, то, очевидно, эту функцию достаточно исследовать на абсолютный минимум в области $\Omega = \{(m_D,m_H) : m_D \geqslant m_H; m_H \geqslant 0\}$, где КДТ эффективный потенциал (26) выглядит как

$$\begin{aligned} V_\Omega(m_D,m_H) &=\\ &= \frac{1}{12\pi}\Big(3gm_D^2+3gm_H^2+4m_D^3+12m_Dm_H^2\Big). \end{aligned} \tag{27}$$

Нетрудно видеть, что при $g>0$ функция (27) достигает своего наименьшего значения при $m_D=m_H=0$ и, значит, в этом случае ни масса Дирака, ни масса Халдане не генерируется в модели Тирринга (т.е. симметрия остается ненарушенной). Однако в случае $g<0$ наименьшее значение функции $V_\Omega(m_D,m_H)$ по области Ω достигается при $m_D=-g/2, m_H=0$, и равно $g^3/48\pi$. В этой же точке располагается и абсолютный минимум функции (26). В силу симметрии КДТ эффективного потенциала $V(m_D,m_H)$ (26) относительно преобразования $m_H\leftrightarrow m_D$ очевидно, что он принимает это же наименьшее значение и в другой точке, которая имеет вид $m_D=0, m_H=-g/2$.

Таким образом, подход Хартри–Фока к изучению фазовой структуры безмассовой (2+1)-мерной модели Тирринга показывает, что если зависимость голой константы связи G от Λ определяется соотношением (22), то в модели на равном основании могут спонтанным образом возникнуть две фазы, имеющих одну и ту же энергию основного состояния. Первая из них характеризуется динамически возникающей массой Дирака $m_D = -g/2$ и спонтанным нарушением киральной инвариантности. Во второй возможной фазе динамически возникает масса Халдане $m_H = -g/2$ и спонтанно нарушается пространственная четность $\mathcal{P}$. Так как плотность свободной энергии в этих фазах одинакова и равна $g^3/48\pi$, то они могут сосуществовать. Следовательно, основное состояние модели Тирринга может выглядеть как пространство, заполненное одной из этих фаз, в котором есть пузыри другой фазы.

Посмотрим, наконец, на фазовую структуру модели с точки зрения ренормализационной группы. Для этого введем безразмерную голую константу связи $\lambda(\Lambda) \equiv \Lambda G(\Lambda)$. С этой величиной связана так называемая функция Каллана–Симанзика $\beta(\lambda) = \Lambda\frac{\partial\lambda(\Lambda)}{\partial\Lambda}$. Используя соотношение (22), можно получить

$$\beta(\lambda) = \frac{\lambda}{\lambda_0}(\lambda_0 - \lambda), \tag{28}$$

где $\lambda_0 = \frac{2N\pi^2}{3}$ есть нуль функции $\beta(\lambda)$. Поведение этой функции в окрестности λ_0 указывает на то, что λ_0 есть УФ-стабильная точка модели. Это означает, что в непрерывном пределе (т.е. при $\Lambda \to \infty$) $\lambda(\Lambda)$ стремится к УФ-стабильной точке λ_0. (Эту особенность безразмерной константы связи $\lambda(\Lambda)$ можно увидеть непосредственно из (23).) Кроме того, для значений $\lambda > \lambda_0$ обычно располагается фаза с нарушенной симметрией, а при $\lambda < \lambda_0$ — фаза с ненарушенной симметрией. Эти свойства УФ-стабильной точки модели подтверждаются и приведенными выше расчетами. Действительно, из соотношения (23) легко увидеть, что

$$\lambda - \lambda_0 = -\frac{\pi^3 N g}{6\Lambda^2} + \cdots . \tag{29}$$

Поэтому симметричная фаза модели (а в этом случае, как следует из комментария, приведенного после (27), мы имеем $g > 0$) реализуется при $\lambda < \lambda_0$. Тогда как при $g < 0$ в модели должна возникнуть динамически одна из масс, Дирака или Халдане, т.е. симметрия должна быть нарушена. С учетом этого мы видим из (29), что в этом случае $\lambda > \lambda_0$. Отсюда следуют два вывода. (i) В рамках подхода ХФ к трехмерной безмассовой модели Тирринга генерация массы фермиона возможна при любом конечном значении N. (ii) Очевидно, что $\lambda_0 \to \infty$ при $N \to \infty$. Значит, в этом случае ни при каких конечных значениях λ (так как $\lambda < \lambda_0$) невозможно обнаружить динамическую генерацию масс Дирака или Халдане, т.е. фазу со спонтанным нарушением или киральной симметрии, или $\mathcal{P}$–четности, в рамках лидирующего порядка $1/N$ приближения.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе методом Хартри–Фока исследована фазовая структура безмассовой (2+1)-мерной модели Тирринга, в которой фермионы 4–компонентны. Основа метода — уравнение ХФ (16) для фермионного пропагатора [21]. До этого подход ХФ не использовался при рассмотрении свойств модели Тирринга, а другие приближения ($1/N$-разложение, вариационный подход и т.д.) давали противоречивую информацию о структуре основного состояния ($\equiv$ вакуума) модели. В одних работах предсказывалась динамическая генерация массы Дирака $m_D\overline{\Psi}_k\Psi_k$ и возникновение фазы с нарушенной киральной симметрией [8, 9]. В других — основное состояние характеризовалось нарушением $\mathcal{P}$–четности и возникновением у фермионов массы Халдане $m_H\overline{\Psi}_k\tau\Psi_k$ [11–13]. С помощью подхода ХФ нам удалось показать, что нет никакого антагонизма между этими результатами, так как на самом деле вакуум в трехмерной модели Тирринга есть смешанное состояние, в котором эти две фазы сосуществуют. Иными словами, в части двумерного пространства у фермионов динамически генерируется масса Дирака и происходит спонтанное нарушение киральной симметрии. В то же самое время эта фаза может граничить с пузырями другой фазы, в которой у фермионов генерируется масса Халдане, и $\mathcal{P}$-четность спонтанно нарушена. При переходе из одной фазы в другую в системе происходит фазовый переход первого рода.

Важно подчеркнуть, что наши результаты справедливы при любом конечном значении N, т.е. их проблематично воспроизвести в рамках техники $1/N$-разложения. Кроме того, они могут быть полезны при описании физических явлений в кристаллических системах с планарной структурой, например, в графене и т.д. В таких ситуациях при низких энергиях и в непрерывном пределе физические процессы удобно описывать *безмассовыми* (2+1)-мерными моделями квантовой теории поля с 4–фермионным взаимодействием [3, 4], среди которых и модель Тирринга (1).

И последнее замечание. Отметим, что если учесть взаимодействие спина квазичастиц графена с внешним магнитным полем или принять во внимание его кристаллическую структуру, то лагранжиан графена на решетке будет, конечно, отличаться от лагранжиана Тирринга (1) (см., например, [3, 4]) прежде всего тем, что он будет не $U(2N)$-, а $U(N)$–симметричным. Подчеркнем, что для описания низкоэнергетических свойств такой решеточной модели для графена, можно по-прежнему использовать эффективно модели теории поля (т.е. непрерывный предел), которые отличаются от лагранжиана (1) наличием членов с 4–фермионным взаимодействием вида $(\overline{\Psi}_k\Psi_k)^2$ и др. (см. в [3, 4]) и которые будут $U(N)$ инвариантными. Однако в таких эффективных моделях возможна динамическая генерация масс Дирака, Халдане и т.д., т.е. их фазовая структура во многом похожа на фазовую структуру (2+1)-мерной модели Тирринга.

Р. Н. Ж. благодарен за поддержку Фонду развития теоретической физики и математики «БАЗИС» (грант для молодых кандидатов наук).

Приложение: Алгебра γ–матриц в случае группы $SO(2,1)$

Двумерное неприводимое (спинорное) представление (2+1)-мерной $SO(2,1)$ группы Лоренца реализуется с помощью следующих 2×2 $\tilde{\gamma}$-матриц:

$$\tilde{\gamma}^0=\sigma_3=\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix},\ \tilde{\gamma}^1=i\sigma_1=\begin{pmatrix}0&i\\i&0\end{pmatrix},\qquad \tilde{\gamma}^2=i\sigma_2=\begin{pmatrix}0&1\\-1&0\end{pmatrix}, \tag{30}$$

которые действуют на двухкомпонентные спиноры Дирака. Они обладают свойствами:

$$Tr(\tilde{\gamma}^\mu\tilde{\gamma}^\nu)=2g^{\mu\nu};\quad [\tilde{\gamma}^\mu,\tilde{\gamma}^\nu]=-2i\varepsilon^{\mu\nu\alpha}\tilde{\gamma}_\alpha;\qquad \tilde{\gamma}^\mu\tilde{\gamma}^\nu=-i\varepsilon^{\mu\nu\alpha}\tilde{\gamma}_\alpha+g^{\mu\nu}, \tag{31}$$

где $g^{\mu\nu}=g_{\mu\nu}=diag(1,-1,-1)$, $\tilde{\gamma}_\alpha=g_{\alpha\beta}\tilde{\gamma}^\beta$, $\varepsilon^{012}=1$. Также справедливо и соотношение:

$$Tr(\tilde{\gamma}^\mu\tilde{\gamma}^\nu\tilde{\gamma}^\alpha)=-2i\varepsilon^{\mu\nu\alpha}. \tag{32}$$

Так как в (2+1) измерении в двумерном спинорном представлении нет других 2×2 матриц, которые бы антикоммутировали со всеми матрицами Дирака $\tilde{\gamma}^\nu$ (30), то явление киральной симметрии невозможно ввести в теорию, если в ней ферми–поля преобразуются по неприводимому спинорному представлению группы $SO(2,1)$. Тем не менее важная концепция киральной симметрии, а также ее нарушение с помощью массовых членов лагранжиана может быть введена в (2+1) измерении, если для ферми–полей Дирака использовать приводимое 4-компонентное представление этой группы. В этом случае спиноры Дирака $\Psi(x)$ имеют вид:

$$\Psi(x)=\begin{pmatrix}\psi_1(x)\\ \psi_2(x)\end{pmatrix}, \tag{33}$$

где ψ_1 и ψ_2 — двухкомпонентные спиноры. В этом представлении мы имеем дело уже с $4{\times}4$ γ-матрицами вида: $\gamma^\mu=diag(\tilde{\gamma}^\mu,-\tilde{\gamma}^\mu)$, где $\tilde{\gamma}^\mu$ представлены в (30) (Такое приводимое представление для γ–матриц используется, например, в работе [25]). Нетрудно показать, что$(\mu,\nu=0,1,2)$:

$$Tr(\gamma^\mu\gamma^\nu)=4g^{\mu\nu};\quad \gamma^\mu\gamma^\nu=\sigma^{\mu\nu}+g^{\mu\nu};\qquad \sigma^{\mu\nu}=\frac{1}{2}[\gamma^\mu,\gamma^\nu]=diag(-i\varepsilon^{\mu\nu\alpha}\tilde{\gamma}_\alpha,-i\varepsilon^{\mu\nu\alpha}\tilde{\gamma}_\alpha). \tag{34}$$

Кроме матриц Дирака γ^μ $(\mu=0,1,2)$ существуют две других матрицы, γ^3 и γ^5, которые антикоммутируют со всеми γ^μ $(\mu=0,1,2)$ и друг с другом,

$$\gamma^3=\begin{pmatrix}0\,,&I\\I\,,&0\end{pmatrix},\quad \gamma^5=\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3=i\begin{pmatrix}0\,,&-I\\I\,,&0\end{pmatrix},\qquad \tau=-i\gamma^3\gamma^5=\begin{pmatrix}I\,,&0\\0\,,&-I\end{pmatrix}. \tag{35}$$

где I — единичная 2×2 матрица.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Semenoff G. W., Wijewardhana L. C. R.* // Phys. Rev. Lett. 1989. **63**, P. 2633.
2. *Semenoff G. W., Shovkovy I. A., Wijewardhana L. C. R.* // Mod. Phys. Lett. A. 1998. **13**. P. 1143.
3. *Gusynin V. P., Sharapov S. G., Carbotte J. P.* // Int. J. Mod. Phys. B. 2007. **21**. P. 4611.
4. *Ebert D., Klimenko K.G., Kolmakov P.B., Zhukovsky V.C.* // Annals Phys. 2016. **371**. P. 254
5. *Vshivtsev A.S., Magnitsky B.V., Zhukovsky V.C., Klimenko K.G.* // Phys. Part. Nucl. 1998. **29**. P. 523
6. *Zhukovsky V.C., Klimenko K.G., Khudyakov V.V., Ebert D.* //, JETP Lett. 2001. **73**. P. 121.
7. *Gomes M., Mendes R.S., Ribeiro R.F., da Silva A.J.* // Phys. Rev. D. 1991. **43**. P. 3516.
8. *Hong D.K., Park S.H.* // Phys. Rev. D. 1994. **49**. P. 5507.
9. *Itoh T., Kim Y.,Sugiura M., Yamawaki K.* // Prog. Theor. Phys. 1995. **93**. P. 417.
10. *Hands S.* // Phys. Rev. D. 1995. **51**. P. 5816.
11. *Hyun S., Lee G. H., Yee J. H.* // Phys. Rev. D. 1994. **50**. 6542.
12. *Ahn Y.M., Chung B.K., Chung J.M., Park Q.H.* // arXiv:hep-th/9404181 [hep-th].
13. *Rossini G., Schaposnik F.A.* // Phys. Lett. B. 1994. **338**. P. 465.
14. *Rosenstein B., Warr B.J., Park S.H.* // Phys. Rept. 1991. **205**. 59.
15. *Klimenko K.G.* // Z. Phys. C. 1991. **50**. P. 477; Mod. Phys. Lett. A. 1994. **9**. P. 1767.
16. *Kneur J.L., Pinto M.B., Ramos R.O., Staudt E.* // Phys. Lett. B. 2007. **657**. P. 136.
17. *Киржниц Д.А.* Полевые методы теории многих частиц. М.: Госатомиздат, 1963.
18. *Cornwall J.M., Jackiw R., Tomboulis E.* // Phys. Rev. D. 1974. **10**. P. 2428.
19. *Klevansky S.P.* // Rev. Mod. Phys. 1992. **64**. P. 649.
20. *Васильев А.Н., Панасюк Г.Ю.* // ТМФ. 1995. **103**. 295.
21. *Buballa M.* // Phys. Rept. 2005. **407**. P. 205.
22. *Sun B.Y., Lombardo U., Burgio G.F., Meng J.* // arXiv:0910.4087 [nucl-th].
23. *Khunjua T.G., Klimenko K.G., Zhokhov R.N.* // Int. J. Mod. Phys. A. 2021. **36**, no.31n32. 2150231.
24. *Khunjua T.G., Klimenko K.G., Zhokhov R.N.* // Phys. Rev. D. 2022. **105**, N 2. 025014.
25. *Appelquist T.W., Bowick M., Karabali D., Wijewardhana L.C.R.* // Phys. Rev. D. 1986, **33**. P. 3704.
26. *Klimenko K.G.* // Z. Phys. C. 1993. **57**. P. 175.
27. *Garibli A.A., Jafarov R.G., Rochev V.E.* // Symmetry. 2019. **11**, N 5. P. 668.
28. *Krasnikov N.V.,Kyatkin A.B.* // Mod. Phys. Lett. A. 1991. **6**. P. 1315.

The Hartree–Fock Approach to the Dynamic Generation of the Fermion Mass in the (2 + 1)-Dimensional Thirring Model

M. M. Gubaeva[1], **R. N. Zhokhov**[2], **K. G. Klimenko**[1,3,a], **T. G. Khunjua**[4],

[1]*Dubna State University («Protvino» branch)*
Protvino, Moscow Region, 142281, Russia
[2]*Russian Academy of Sciences, Institute of Terrestrial Magnetism, Ionosphere and Radio Wave Propagation. Troitsk, Moscow Region, 142092 Russia*
[3]*State Research Center of Russian Federation Institute for High Energy Physics, NRC «Kurchatov Institute». Protvino, Moscow Region, 142281, Russia*
[4]*A. Razmadze Mathematical Institute, Georgian Academy of Sciences, Department of Theoretical Physics. Tbilisi, GE-0193, Georgia*
E-mail: [a]*kklim@ihep.ru*

The (2 + 1)-dimensional massless Thirring model with 4-component Fermi–fields is investiated by the Hartree–Fock method. It is shown that its ground state is a mixed phase consisting of a phase in which the dynamically generated fermion mass spontaneously violates the chiral invariance of the model, as well as a phase with a Fermi–particle mass violating $\mathcal{P}$–parity. It was found that the dynamic generation of the fermion mass is possible for any finite number of Fermi fields.

Keywords: (2+1)-dimensional Thirring model, Hartree–Fock equation, dynamical mass generation.
PACS: 11.10.Kk, 04.60.Kz.
Received 31 March 2022.

English version: *Moscow University Physics Bulletin*. 2022. **77**, No. 4. Pp. 589–597.

Сведения об авторах

1. Губаева Милета Михайловна — ст. преподаватель; тел.: (496) 774-53-40, e-mail: mileta.gubaeva@mail.ru.
2. Жохов Роман Николаевич — канд. физ.-мат. наук, науч. сотрудник; e-mail: zhokhovr@gmail.com.
3. Клименко Константин Григорьевич — доктор физ.-мат. наук, гл. науч. сотрудник; тел.: (496) 774-11-98, e-mail: kklim@ihep.ru.
4. Хунджуа Тамаз Григорьевич — канд. физ.-мат. наук, науч. сотрудник; e-mail: t.khunjua@ug.edu.ge.