МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования «Университет «Дубна»
(государственный университет «Дубна»)

Утверждаю
И.о. проректора по учебной работе
__________________О.А. Крейдер
«17» мая 2024 года

ПРОГРАММА
ВСТУПИТЕЛЬНОГО ИСПЫТАНИЯ
ПО ОБЩЕОБРАЗОВАТЕЛЬНОМУ ПРЕДМЕТУ
«МАТЕМАТИКА»

Дубна 2024 г.

Павлешивили Михаил Петрович
Павл
12.05.2021.

Программа вступительных испытаний по математике

Настоящая программа состоит из трех разделов.

В первом разделе перечислены основные математические понятия, которыми должен владеть поступающий.

Второй раздел представляет собой перечень вопросов теоретической части экзамена. При подготовке к экзамену целесообразно познакомиться с формулировками утверждений этого раздела.

В третьем разделе указано, какие навыки и умения требуются от поступающего на экзаменах.

Объем знаний и степень владения материалом, описанным в программе, соответствуют курсу математики средней школы. Поступающий может пользоваться всем арсеналом средств из этого курса, включая и начала анализа. Однако для решения экзаменационных задач достаточно уверенного владения лишь теми понятиями и их свойствами, которые перечислены в настоящей программе. Объекты и факты, не изучаемые в общеобразовательной школе, также могут использоваться поступающими, но при условии, что он способен их пояснять и доказывать.

В связи с обилием учебников и регулярным их переизданием отдельные утверждения второго раздела могут в некоторых учебниках называться иначе, чем в программе, или формулироваться в виде задач, или вовсе отсутствовать. Такие случаи не освобождают поступающего от необходимости знать эти утверждения.

I. Основные понятия

1. Натуральные числа. Делимость. Простые и составные числа. Наибольший общий делитель и наименьшее общее кратное.
2. Целые, рациональные и действительные числа. Проценты. Модуль числа, степень, корень, арифметический корень, логарифм. Синус, косинус, тангенс, котангенс числа (угла). Арксинус, арккосинус, арктангенс, арккотангенс числа.
3. Числовые и буквенные выражения. Равенства и тождества.
4. Функция, ее область определения и область значений. Возрастание, убывание, периодичность, четность, нечетность. Наибольшее и наименьшее значения функции. График функции.
5. Линейная, квадратичная, степенная, показательная, логарифмическая, тригонометрические функции.
6. Уравнение, неравенства, система. Решения (корни) уравнения, неравенства, системы. Равносильность.
7. Арифметическая и геометрическая прогрессии.
8. Прямая на плоскости. Луч, отрезок, ломаная, угол.
9. Треугольник. Медиана, биссектриса, высота.
10. Выпуклый многоугольник. Квадрат, прямоугольник, параллелограмм, ромб, трапеция. Правильный многоугольник. Диагональ.

11. Окружность и круг. Радиус, хорда, диаметр, касательная, секущая. Дуга окружности и круговой сектор. Центральный и вписанные углы.
12. Прямая и плоскость в пространстве. Двугранный угол.
13. Многогранник. Куб, параллелепипед, призма, пирамида.
14. Цилиндр, конус, шар, сфера.
15. Равенство и подобие фигур. Симметрия.
16. Параллельность и перпендикулярность прямых, плоскостей. Скрещивающиеся прямые. Угол между прямыми, плоскостями, прямой и плоскостью.
17. Касание. Вписанные и описанные фигуры на плоскости и в пространстве. Сечение фигуры плоскостью.
18. Величина угла. Длина отрезка, окружности и дуги окружности. Площадь многоугольника, круга и кругового сектора. Площадь поверхности и объем многогранника, цилиндра, конуса, шара.
19. Координатная прямая. Числовые промежутки. Декартовы координаты на плоскости и в пространстве. Векторы.

II. Содержание теоретической части экзамена

Алгебра

1. Признаки делимости на 2, 3, 5, 9, 10.
2. Свойства числовых неравенств.
3. Формулы сокращенного умножения.
4. Свойства линейной функции и ее график.
5. Формула корней квадратного уравнения. Теорема о разложении квадратного трехчлена на линейные множители. Теорема Виета.
6. Свойства квадратичной функции и ее график.
7. Неравенство, связывающее среднее арифметическое и среднее геометрическое двух чисел. Неравенство для суммы двух взаимно обратных чисел.
8. Формулы общего члена и суммы n первых членов арифметической прогрессии.
9. Формулы общего члена и суммы n первых членов геометрической прогрессии.
10. Свойства степеней с натуральными и целыми показателями. Свойства арифметических корней n-й степени. Свойства степеней с рациональными показателями.
11. Свойства степенной функции с целым показателем и ее график.
12. Свойства показательной функции и ее график.
13. Основное логарифмическое тождество. Логарифмы произведения, степени, частного. Формула перехода к новому основанию.
14. Свойства логарифмической функции и ее график.
15. Основное тригонометрическое тождество. Соотношения между тригонометрическими функциями одного и того же аргумента. Формулы приведения, сложения, двойного и половинного аргумента, суммы и разности тригонометрических функций. Выражение тригонометрических функций через тангенс половинного аргумента. Преобразование произведения синусов и косинусов в сумму. Преобразование выражения $a\sin x + b\cos x$ с помощью вспомогательного аргумента.
16. Формулы решений простейших тригонометрических уравнений.
17. Свойства тригонометрических функций и их графики.

Геометрия

1. Теоремы о параллельных прямых на плоскости.

2. Свойства вертикальных и смежных углов.
3. Свойства равнобедренного треугольника.
4. Признаки равенства треугольников.
5. Теорема о сумме внутренних углов треугольника. Теорема о внешнем угле треугольника. Свойства средней линии треугольника.
6. Теорема Фалеса. Признаки подобия треугольников.
7. Признаки равенства и подобия прямоугольных треугольников. Пропорциональность отрезков в прямоугольном треугольнике. Теорема Пифагора.
8. Свойство серединного перпендикуляра к отрезку. Свойство биссектрисы угла.
9. Теоремы о пересечении медиан, пересечении биссектрис и пересечении высот треугольника.
10. Свойство отрезков, на которые биссектриса треугольника делит противоположную сторону.
11. Свойство касательной к окружности. Равенство касательных, проведенных из одной точки к окружности. Теоремы о вписанных углах. Теорема об угле, образованном касательной и хордой. Теоремы об угле между двумя пересекающимися хордами и об угле между двумя секущими, выходящими из одной точки. Равенство произведений отрезков двух пересекающихся хорд. Равенство квадрата касательной произведению секущей на ее внешнюю часть.
12. Свойство четырехугольника, вписанного в окружность. Свойство четырехугольника, описанного около окружности.
13. Теорема об окружности, вписанной в треугольник. Теорема об окружности, описанной около треугольника.
14. Теоремы синусов и косинусов для треугольника.
15. Теорема о сумме внутренних углов выпуклого многоугольника.
16. Признаки параллелограмма. Свойства параллелограмма.
17. Свойства средней линии трапеции.
18. Формула для вычисления расстояния между двумя точками на координатной плоскости. Уравнение окружности.
19. Теоремы о параллельных прямых в пространстве. Признак параллельности прямой и плоскости. Признак параллельности плоскостей.
20. Признак перпендикулярности прямой и плоскости. Теорема об общем перпендикуляре к двум скрещивающимся прямым. Признак перпендикулярности плоскостей. Теорема о трех перпендикулярах.

III. Требования к поступающему

На экзамене по математике поступающий должен уметь:

1. выполнять (без калькулятора) действия над числами и числовыми выражениями; преобразовывать буквенные выражения; производить операции над векторами (сложение, умножение на число, скалярное произведение); переводить одни единицы измерения величин в другие;
2. сравнивать числа и находить их приближенные значения (без калькулятора); доказывать тождества и неравенства для буквенных выражений;
3. решать уравнения, неравенства, системы (в том числе с параметрами) и исследовать их решения;
4. исследовать функции; строить графики функций и множества точек на координатной плоскости, заданные уравнениями и неравенствами;

5. изображать геометрические фигуры на чертеже; делать дополнительные построения; строить сечения; исследовать взаимное расположение фигур; применять признаки равенства, подобия фигур и их принадлежности к тому или иному виду;
6. пользоваться свойствами чисел, векторов, функций и их графиков, свойствами арифметической и геометрической прогрессий;
7. пользоваться свойствами геометрических фигур, их характерных точек, линий и частей, свойствами равенства, подобия и взаимного расположения фигур;
8. пользоваться соотношениями и формулами, содержащими модули, степени, корни, логарифмические, тригонометрические выражения, величины углов, длины, площади, объемы;
9. составлять уравнения, неравенства и находить значения величин, исходя из условия задачи;
10. излагать и оформлять решение логически правильно, полно и последовательно, с необходимыми пояснениями.

На устном экзамене поступающий должен дополнительно уметь:

11. давать определения, формулировать и доказывать утверждения (формулы, соотношения, теоремы, признаки, свойства и т.п.), указанные во втором разделе настоящей программы;
12. анализировать формулировки утверждений и их доказательства;
13. решать задачи на построение циркулем, линейкой; находить геометрические места точек.

2. СПРАВОЧНЫЙ МАТЕРИАЛ

2.1. Модуль действительного числа

По определению:

$$|a| = \begin{cases} a, & \text{если } a \ge 0, \\ -a, & a < 0. \end{cases}$$

Свойства модуля действительного числа:

$$|-a| = |a|,\ |a|^2 = a^2,\ |a \cdot b| = |a| \cdot |b|,$$

$$\left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|},\ |a+b| \le |a| + |b|,\ |a-b| \ge |a| - |b|.$$

Свойства неравенств:

$$|x| \le a \Leftrightarrow \begin{cases} x \le a, \\ x \ge -a, \end{cases} \qquad |x| \ge a \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x \ge a, \\ x \le -a. \end{array}\right.$$

$$\sqrt[2n]{a^{2n}} = |a|, n \in N, n \ne 1.$$

2.2. Свойства степеней

Арифметическим корнем степени $n \in N$ $(n > 1)$ из неотрицательного числа a называется неотрицательное число b такое, что $b^n = a$. Обозначается $\sqrt[n]{a} = b$.

По определению.

Пусть $a > 0$, тогда

$$a^0 = 1;\ a^{-n} = \frac{1}{a^n},\ n \in N;\ a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m},\ m,\ n \in N,\ n \ne 1.$$

Свойства арифметических корней.

Пусть $a \ge 0, b > 0,\ n \in N,\ n \ne 1, m \in N,\ m \ne 1$, тогда

$$\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b},\quad \sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}},\quad (\sqrt[n]{a})^m = \sqrt[n]{a^m},\quad \sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[mn]{a},\quad \sqrt[n]{a} = \sqrt[mn]{a^m}.$$

Свойства действительных степеней.

Пусть $a>0,\ b>0$, тогда

$$a^x \cdot a^y = a^{x+y},\ \frac{a^x}{a^y} = a^{x-y},\ \left(a^x\right)^y = a^{xy},\ a^x \cdot b^x = (ab)^x,$$

$$x \cdot \sqrt{b} = \begin{cases} \sqrt{x^2 \cdot b}, & \text{если } x \ge 0, \\ -\sqrt{x^2 \cdot b}, & x < 0. \end{cases}$$

2.3. Формулы сокращенного умножения

$$(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2,$$

$$a^2 - b^2 = (a-b)\cdot(a+b),$$

$$(a \pm b)^3 = a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3,$$

$$a^3 \pm b^3 = (a \pm b)\cdot(a^2 \mp ab + b^2).$$

$$a^n - b^n = (a-b)\cdot(a^{n-1} + a^{n-2}b + \ldots + ab^{n-2} + b^{n-1}),$$

$$a^{2n+1} + b^{2n+1} = (a+b)\cdot(a^{2n} - a^{2n-1}b + \ldots - ab^{2n-1} + b^{2n}),\ n \in N.$$

$$a^2 + b^2 = (a+b)^2 - 2ab,\quad a^2 + b^2 = (a-b)^2 + 2ab.$$

2.4. Рациональные уравнения

Корни уравнения $ax^2 + bx + c = 0,\ a \ne 0$; $a,\ b,\ c$ - действительные числа, вычисляются по формуле: $x_{1,2} = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$.

Теорема Виета.

Сумма корней уравнения $ax^2 + bx + c = 0$ равна $-\dfrac{b}{a}$, а произведение $\dfrac{c}{a}$, т.е.

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -b/a, \\ x_1 \cdot x_2 = c/a. \end{cases}$$

Разложение на множители.

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2).$$

2.5. Логарифмы

Логарифмом положительного числа b по основанию a $(a>0,\ a\neq 1)$ называется показатель степени x, в которую нужно возвести a, чтобы получить число b. Обозначается $x=\log_a b$.

По определению.

$$\log_a 1=0, \qquad \log_a a=1.$$

Основное логарифмическое тождество.

$$a^{\log_a b}=b, \qquad \log_a a^b=b.$$

Основные свойства логарифмов:

1. $\log_a x_1x_2=\log_a|x_1|+\log_a|x_2|,\ x_1x_2>0,$

2. $\log_a \dfrac{x_1}{x_2}=\log|x_1|-\log_a|x_2|,\ \dfrac{x_1}{x_2}>0,$

3. $\log_a x^p=p\log_a x,\ x>0,\ (\log_a x^2=2\log_a|x|,\ x\neq 0),$

4. $\log_{a^p} b=\dfrac{1}{p}\log_a b,$

5. $\log_a b=\dfrac{1}{\log_b a},$

6. $\log_a b=\dfrac{\log_c b}{\log_c a},\ c>0, c\neq 1.$

2.6. Прогрессии

Арифметической прогрессией называется такая числовая последовательность $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots$, в которой каждое число, начиная со второго, равно предыдущему, сложенному с одним и тем же числом, постоянным для этой последовательности. Это число называется разностью прогрессии и обозначается d.

По определению.

$$a_k = a_{k-1} + d = a_1 + (k-1)d, \; k \in N, \; k > 1.$$

Сумма n членов арифметической прогрессии.

$$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} n = \frac{2a_1 + (n-1)d}{2} n.$$

Признак арифметической прогрессии.

$$a_k = \frac{a_{k-1} + a_{k+1}}{2}, \; k \in N, \; k > 1.$$

Геометрической прогрессией называется такая числовая последовательность: $b_1, b_2, b_3, \ldots, b_n, \ldots$, в которой первый член отличен от нуля, а каждый из последующих равен предыдущему, умноженному на некоторое число, отличное от нуля. Это число называется знаменателем прогрессии и обозначается q.

По определению.

$$b_k = b_{k-1} \cdot q = b_1 \cdot q^{k-1}, \; k \in N, \; k > 1.$$

Сумма n членов геометрической прогрессии.

$$S_n = b_1 \frac{1-q^n}{1-q}, \; q \neq 1 \quad (\text{при } q = 1, \; S_n = b_1 n).$$

Признак геометрической прогрессии.

$$b_k^2 = b_{k-1} \cdot b_{k+1}, \; k = 2, 3, 4, \ldots$$

Сумма бесконечно убывающей геометрической прогрессии.

$$S = \frac{b_1}{1-q}, \quad S \text{ – сумма прогрессии}, \; |q| < 1, \; n \to \infty.$$

2.7. Тригонометрия

Функции одного и того же угла:

1. $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1.$ 2. $\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}, \; \operatorname{ctg} \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}.$

3. $\operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{ctg}\alpha = 1$.

4. $1 + \operatorname{tg}^2 \alpha = \dfrac{1}{\cos^2 \alpha}$.

5. $1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha = \dfrac{1}{\sin^2 \alpha}$.

6. $\sin\alpha = \dfrac{\operatorname{tg}\alpha}{\pm\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha}}$.

7. $\cos\alpha = \dfrac{1}{\pm\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha}}$.

Формулы сложения:

1. $\sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha \cdot \cos\beta \pm \cos\alpha \cdot \sin\beta$.

2. $\cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha \cdot \cos\beta \,\mu\, \sin\alpha \cdot \sin\beta$.

3. $\operatorname{tg}(\alpha \pm \beta) = \dfrac{\operatorname{tg}\alpha \pm \operatorname{tg}\beta}{1 \,\mu\, \operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{tg}\beta}$.

Формулы двойных, половинных, тройных углов:

1. $\sin 2\alpha = 2\sin\alpha \cdot \cos\alpha = \dfrac{2\operatorname{tg}\alpha}{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha}$.

2. $\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = 2\cos^2 \alpha - 1 = 1 - 2\sin^2 \alpha = \dfrac{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha}{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha}$.

3. $\operatorname{tg} 2\alpha = \dfrac{2\operatorname{tg}\alpha}{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha}$.

4. $\cos\dfrac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\dfrac{1 + \cos\alpha}{2}}$, $\sin\dfrac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\dfrac{1 - \cos\alpha}{2}}$.

5. $\operatorname{tg}\dfrac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\dfrac{1 - \cos\alpha}{1 + \cos\alpha}} = \dfrac{1 - \cos\alpha}{\sin\alpha} = \dfrac{\sin\alpha}{1 + \cos\alpha}$.

Преобразование суммы функций в произведение:

1. $\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\dfrac{\alpha + \beta}{2} \cdot \cos\dfrac{\alpha - \beta}{2}$.

2. $\cos\alpha - \cos\beta = -2\sin\dfrac{\alpha + \beta}{2} \cdot \sin\dfrac{\alpha - \beta}{2}$.

3. $\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\dfrac{\alpha + \beta}{2} \cdot \cos\dfrac{\alpha - \beta}{2}$.

4. $\sin\alpha - \sin\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$.

5. $\operatorname{tg}\alpha \pm \operatorname{tg}\beta = \frac{\sin(\alpha\pm\beta)}{\cos\alpha\cdot\cos\beta}$.

Преобразование произведений функций:

1. $\cos\alpha\cdot\cos\beta = \frac{1}{2}\left(\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)\right)$.

2. $\sin\alpha\cdot\sin\beta = \frac{1}{2}\left(\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)\right)$.

3. $\sin\alpha\cdot\cos\beta = \frac{1}{2}\left(\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)\right)$.

Понижение степени:

1. $\cos^2\alpha = \frac{1}{2}(1+\cos2\alpha)$. 2. $\sin^2\alpha = \frac{1}{2}(1-\cos2\alpha)$.

3. $\sin\alpha\cdot\cos\alpha = \frac{1}{2}\sin2\alpha$.

Значение тригонометрических функций некоторых углов.

α	0°	30°	45°	60°	90°	180°	270°	360°
$\sin\alpha$	0	1/2	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{3}/2$	1	0	–1	0
$\cos\alpha$	1	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{2}/2$	1/2	0	–1	0	1
$\operatorname{tg}\alpha$	0	$1/\sqrt{3}$	1	$\sqrt{3}$	–	0	–	0
$\operatorname{ctg}\alpha$	–	$\sqrt{3}$	1	$1/\sqrt{3}$	0	–	0	–

Простейшие тригонометрические уравнения.

1. $\sin x = a,\ |a|\le 1,\quad x = (-1)^n\arcsin a + \pi n,\quad n\in Z;$

$\arcsin(-a) = -\arcsin a,\quad \arcsin a \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.

2. $\cos x = a,\ |a| \le 1, \quad x = \pm \arccos a + 2\pi k, \quad k \in Z;$

$$\arccos(-a) = \pi - \arccos a, \quad \arccos x \in [0, \pi].$$

3. $\operatorname{tg} x = a, \quad x = \operatorname{arctg} a + \pi l, \quad l \in Z,$

$$\operatorname{arctg}(-a) = -\operatorname{arctg} a, \quad \operatorname{arctg} a \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right).$$

4. $\operatorname{ctg} x = a, x = \operatorname{arcctg} a + \pi m, \quad m \in Z;$

$$\operatorname{arcctg}(-a) = \pi - \operatorname{arcctg} a, \quad \operatorname{arctg} a \in (0, \pi).$$

Частные случаи:

$$\left.\begin{matrix} \sin x = 0 \\ \operatorname{tg} x = 0 \end{matrix}\right] \Rightarrow x = \pi n,\ n \in Z, \qquad \left.\begin{matrix} \cos x = 0 \\ \operatorname{ctg} x = 0 \end{matrix}\right] \Rightarrow x = \frac{\pi}{2} + \pi n,\ n \in Z,$$

$$\sin x = 1, \quad x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n,\ n \in Z, \qquad \cos x = 1, \quad x = 2\pi n,\ n \in Z,$$

$$\sin x = -1, \quad x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n,\ n \in Z, \qquad \cos x = -1, \quad x = \pi + 2\pi n,\ n \in Z.$$

2.8. Планиметрия

Пусть:

S – площадь,

a, b, c – стороны треугольника,

α, β, γ – противоположные углы,

p – полупериметр,

R – радиус описанной окружности,

r – радиус вписанной окружности,

h_a – высота, проведенная к стороне a,

m_a – медиана, проведенная к стороне a.

Треугольник.

а) ***Медианы*** треугольника пересекаются в одной точке и делятся этой точкой в отношении 2:1, считая от вершины треугольника.

Медиана делит треугольник на два равновеликих треугольника.

б) ***Биссектрисы*** пересекаются в одной точке, являющейся центром окружности, вписанной в треугольник.

Биссектриса угла треугольника делит сторону треугольника на части, пропорциональные прилежащим к ней сторонам.

в) ***Средняя линия*** треугольника параллельна третьей стороне и длина ее равна половине длины третьей стороны.

г) ***Теорема синусов***

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma} = 2R.$$

д) ***Теорема косинусов***

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma.$$

е) ***Площадь***

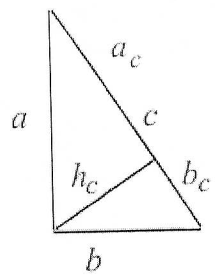
$$S = \frac{1}{2}ah_a, \qquad S = \frac{1}{2}bc\sin\alpha, \qquad S = rp,$$

$$S = \frac{abc}{4R}, \qquad S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}.$$

ж) ***Площадь*** равностороннего треугольника

$$S = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}.$$

Прямоугольный треугольник:



а) ***Теорема Пифагора*** $c^2 = a^2 + b^2$.

б) $r = \frac{a+b-c}{2}$, $R = \frac{c}{2}$.

в) $a^2 = ca_c$, $b^2 = cb_c$, $h_c^2 = a_c b_c$

Выпуклый четырехугольник:

а) $S = \frac{1}{2}d_1 d_2 \sin\varphi$, где d_1, d_2 – диагонали четырехугольника, φ – угол между ними.

б) Вокруг выпуклого четырехугольника можно ***описать*** окружность тогда и только тогда, когда сумма любых двух его противоположных углов равна 180°.

в) В выпуклый четырехугольник можно ***вписать*** окружность тогда и только тогда, когда суммы его противоположных сторон равны.

Ромб.

$$S = a^2 \sin\alpha = \frac{1}{2} d_1 d_2 .$$

Параллелограмм.

а) $2(a^2 + b^2) = d_1^2 + d_2^2$, где a и b стороны параллелограмма, d_1 и d_2 – его диагонали.

б) $S = ab\sin\alpha = ah_a = \frac{1}{2} d_1 d_2 \sin\varphi$.

Сектор.

а) $l = r\alpha$, где l – длина дуги сектора, α – радианная мера центрального угла.

б) $S = \frac{1}{2} r^2 \alpha$.

Трапеция.

а) $l = \frac{a+b}{2}$, где l – средняя линия трапеции.

б) $S = \frac{a+b}{2} h$.

Теоремы о произведениях отрезков секущих:

а) Если из точки S вне окружности проведена касательная ST (T – точка касания) и секущая, пересекающая окружность в точках A и B, то $SA \cdot SB = ST^2$.

б) Если две прямые, проходящие через точку S, пересекают окружность в точках A и B, C и D соответственно, то $SA \cdot SB = SC \cdot SD$.

2.9. Стереометрия

Пусть:

l – боковое ребро,

P – периметр основания,

H – высота,

V – объем,

S – площадь основания,

$S_{бок}$ – площадь боковой поверхности.

Призма.

$$V = SH, \qquad S_{бок} = P_{сеч} \cdot l,$$

где $P_{сеч}$ – периметр сечения, перпендикулярного боковому ребру l.

Параллелепипед (прямоугольный).

$$V = abc, \qquad S_{бок} = P \cdot H, \qquad d^2 = a^2 + b^2 + c^2,$$

где d – диагональ параллелепипеда.

Пирамида.

а) $V = \frac{1}{3}SH$.

б) Если в пирамиде все боковые ребра образуют с плоскостью основания равные углы, то вершина пирамиды проектируется в центр окружности, описанной около основания пирамиды.

в) Если в пирамиде все боковые грани образуют с основанием равные углы, то вершина пирамиды проектируется в центр окружности, вписанной в основание пирамиды.

г) Правильная пирамида.

$$S_{бок} = \frac{1}{2}Ph_a,$$

где h_a – апофема (высота боковой грани).

Усеченная пирамида.

$$S_{бок} = \frac{1}{2}(P_1 + P_2)h_a,$$

где P_1, P_2 – периметры оснований.

$$V = \frac{1}{3}h(S_1 + S_2 + \sqrt{S_1 S_2}),$$

где S_1 и S_2 – площади оснований пирамиды.

Цилиндр.

$$S_{бок} = 2\pi RH, \qquad V = \pi R^2 H,$$

где R – радиус основания.

Конус.

$$V = \frac{1}{3}\pi R^2 H, \qquad S_{бок} = \pi RL,$$

где L – образующая.

Усеченный конус.

$$S_{бок} = \pi(R_1 + R_2)L,$$

где R_1 и R_2 – радиусы оснований, нижнего и верхнего соответственно.

$$V = \frac{1}{3}\pi H(R_1^2 + R_2^2 + R_1 R_2).$$

Шар.

$$V = \frac{4}{3}\pi R^3, \qquad S_{сферы} = 4\pi R^2,$$

где R – радиус шара.

3. РЕШЕНИЕ И ОФОРМЛЕНИЕ ТИПОВЫХ ЗАДАЧ ВСТУПИТЕЛЬНОГО ЭКЗАМЕНА

1. Найти 40% от числа: $3\frac{1}{8}+\left(2\frac{1}{5}-\frac{3}{4}\right):1{,}6$.

Решение. Выполним вычисления по действиям.

1) $2\frac{1}{5}-\frac{3}{4}=\frac{11}{5}-\frac{3}{4}=\frac{11\cdot 4-3\cdot 5}{20}=\frac{44-15}{20}=\frac{29}{20}$.

2) $\left(2\frac{1}{5}-\frac{3}{4}\right):1{,}6=\frac{29}{20}:\frac{16}{10}=\frac{29}{20}\cdot\frac{10}{16}=\frac{29}{32}$.

3) $3\frac{1}{8}+\left(2\frac{1}{5}-\frac{3}{4}\right):1{,}6=\frac{25}{8}+\frac{29}{32}=\frac{25\cdot 4+29}{32}=\frac{129}{32}$.

Чтобы найти 40% от числа $\frac{129}{32}$ составим и решим пропорцию:

$\begin{array}{l}\frac{129}{32}-100\% \\ x\ -40\%\end{array}$, откуда $x=\frac{129\cdot 40}{32\cdot 100}=\frac{129}{80}=1\frac{49}{80}$. **Ответ:** $1\frac{49}{80}$.

2. Вычислить без таблиц и калькулятора:

$$\frac{\lg 75-\frac{1}{2}\lg 9}{\lg 125}\cdot\log_{16}\left(3^{\log_{1/3}(1/4)}\right)\cdot\left(5^{-1}+16^{3/4}\right).$$

Решение. Выполним вычисления по действиям.

1) $\frac{\lg 75-\frac{1}{2}\lg 9}{\lg 125}=\frac{\lg 75-\lg 9^{1/2}}{\lg 125}=\frac{\lg 75-\lg 3}{\lg 125}=\frac{\lg(75/3)}{\lg 125}=\frac{\lg 5^2}{\lg 5^3}=\frac{2\lg 5}{3\lg 5}=\frac{2}{3}$.

2) $\log_{16}\left(3^{\log_{1/3}(1/4)}\right)=\log_{16}\left(3^{\log_3 4}\right)=\log_{16}4=\frac{1}{2}$.

3) $5^{-1}+16^{3/4}=\frac{1}{5}+\left(\sqrt[4]{16}\right)^3=\frac{1}{5}+8=\frac{41}{5}$.

Окончательно имеем: $\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{41}{5}=\frac{41}{15}$. **Ответ:** $\frac{41}{15}$.

Были использованы основные свойства логарифмов:

1) $\log_a x_1x_2 = \log_a|x_1| + \log_a|x_2|,\ x_1x_2 > 0,$

2) $\log_a \dfrac{x_1}{x_2} = \log|x_1| - \log_a|x_2|,\ \dfrac{x_1}{x_2} > 0,$

3) $\log_a x^p = p\log_a x,\ x > 0,$ 4) $\log_{a^p} b = \dfrac{1}{p}\log_a b,$

5) $\log_a b = \dfrac{1}{\log_b a},$ 6) $\log_a b = \dfrac{\log_c b}{\log_c a},\ c > 0, c \neq 1.$

3. Упростить выражение: $\left(\dfrac{3}{\sqrt{1+a}} + \sqrt{1-a}\right) : \left(\dfrac{3}{\sqrt{1-a^2}} + 1\right).$

Решение.

$$\left(\frac{3}{\sqrt{1+a}} + \sqrt{1-a}\right) : \left(\frac{3}{\sqrt{1-a^2}} + 1\right) = \left(\frac{3+\sqrt{1-a}\sqrt{1+a}}{\sqrt{1+a}}\right) : \left(\frac{3+\sqrt{1-a^2}}{\sqrt{1-a^2}}\right) =$$

$$= \frac{3+\sqrt{1-a^2}}{\sqrt{1+a}} \cdot \frac{\sqrt{1-a^2}}{3+\sqrt{1-a^2}} = \frac{\left(3+\sqrt{1-a^2}\right)\cdot\sqrt{1-a^2}}{\sqrt{1+a}\cdot\left(3+\sqrt{1-a^2}\right)} = \frac{\sqrt{1-a}\cdot\sqrt{1+a}}{\sqrt{1+a}} = \sqrt{1-a}.$$

Была использована формула сокращенного умножения

$$a^2 - b^2 = (a-b)(a+b).$$

4. Доказать тождество: $\dfrac{a-16/25}{\sqrt{a}-0{,}8} - \dfrac{a\sqrt{a}-64/125}{a+0{,}8\sqrt{a}+16/25} = 1{,}6.$

Решение. Преобразуем левую часть тождества:

$$\frac{a-16/25}{\sqrt{a}-0{,}8} - \frac{a\sqrt{a}-64/125}{a+0{,}8\sqrt{a}+16/25} = \frac{\left(a^{1/2}\right)^2-(4/5)^2}{a^{1/2}-4/5} -$$

$$- \frac{\left(a^{1/2}\right)^3-(4/5)^3}{\left(a^{1/2}\right)^2+(4/5)a^{1/2}+(4/5)^2} = \frac{(a^{1/2}-4/5)(a^{1/2}+4/5)}{a^{1/2}-4/5} -$$

$$- \frac{(a^{1/2}-4/5)\cdot((a^{1/2})^2+(4/5)a^{1/2}+(4/5)^2)}{(a^{1/2})^2+(4/5)a^{1/2}+(4/5)^2} = a^{1/2}+4/5-$$

$-(a^{1/2}-4/5)=a^{1/2}+4/5-a^{1/2}+4/5=8/5=1{,}6$.

Левая часть равна правой части. Тождество доказано.

Были использованы формулы сокращенного умножения:

1) $a^2-b^2=(a-b)(a+b)$, 2) $a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$.

5. Решить уравнение: $\sqrt{2x+10}-1=x$.

Решение. ОДЗ: $2x+10>0$, $x>-5$.

Исходное уравнение равносильно уравнению: $\sqrt{2x+10}=x+1$.

Возведем обе части уравнения в квадрат. При этом могут появиться посторонние корни, удовлетворяющие ОДЗ, поэтому необходима проверка. $2x+10=(x+1)^2$, $2x+10=x^2+2x+1$, $x^2=9$, откуда

$$x_1=-3, x_2=3.$$

Оба полученных корня удовлетворяют ОДЗ.

Проверка:

1) при $x=-3$ получаем $\sqrt{2\cdot(-3)+10}=-3+1$, $\sqrt{4}=-2$, $2=-2$ (неверно), следовательно $x=-3$ посторонний корень,

2) при $x=3$ получаем $\sqrt{2\cdot 3+10}=3+1$, $\sqrt{16}=4$, $4=4$ (верно), $x=3$ корень уравнения.

Ответ: $x=3$.

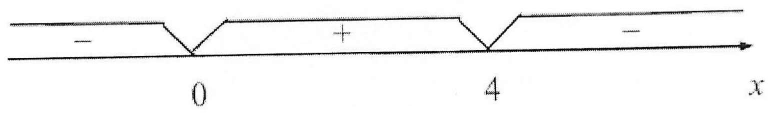
6. Решить неравенство: $\left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{4}{x}-3}<\frac{9}{4}$.

Решение. ОДЗ: $x\neq 0$.

Исходное неравенство равносильно неравенству: $\left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{4}{x}-3}<\left(\frac{2}{3}\right)^{-2}$.

Так как основание $\frac{2}{3}<1$, то функция $y=\left(\frac{2}{3}\right)^t$ является убывающей, при переходе к показателям степени знак неравенства меняется на противоположный, т.е. $\frac{4}{x}-3>-2, \quad \frac{4}{x}-1>0, \quad \frac{4-x}{x}>0$.

Получили дробно-рациональное неравенство. Решим его методом интервалов. Для этого найдем корни числителя и знаменателя $x_1=0, x_2=4$. Определим знаки на каждом из промежутков, на которые точки $x_1=0, x_2=4$ разбивают числовую ось.



Искомое решение: $0<x<4$.

Ответ: $0<x<4$.

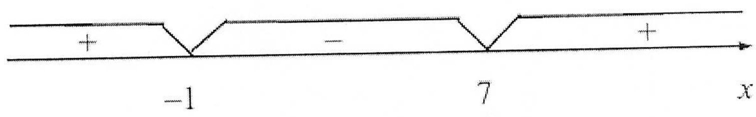
7. Решить неравенство: $(4/3)^{6x+10-x^2}<64/27$.

Решение. ОДЗ: $x\in \boldsymbol{R}$.

Исходное неравенство равносильно: $(4/3)^{6x+10-x^2}<(4/3)^3$.

Так как основание 4/3 > 1 функция $y=(4/3)^t$ является возрастающей, при переходе к показателям степени знак неравенства не меняется, т.е. $6x+10-x^2<3, \quad x^2-6x-7>0$. Получили квадратное неравенство. Решим его методом интервалов. Для этого находим корни левой части неравенства по теореме Виета: $x_1+x_2=6, \quad x_1\cdot x_2=7$, откуда $x_1=-1, \quad x_2=7$.

Определим знаки на каждом из промежутков, на которые точки $x_1=-1, \quad x_2=7$ разбивают числовую ось.



Искомое решение: $x<-1, \ x>7$.

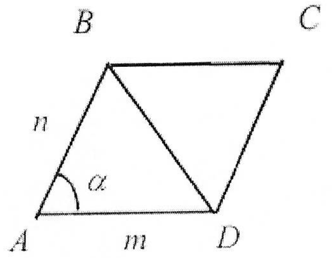
Ответ: $x<-1, \ x>7$.

8. Стороны параллелограмма равны m и n, угол между ними α. Найти площадь параллелограмма и меньшую диагональ.

Дано:

$ABCD$ – параллелограмм,

$AB = n,\ AD = m,\ \angle A = \alpha$.



Найти: S_{ABCD}, BD.

Решение.

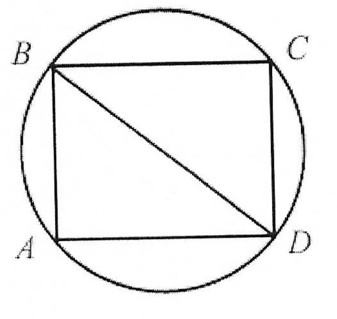
$S_{ABCD} = AB \cdot AD \cdot \sin\alpha = n \cdot m \cdot \sin\alpha$

Диагональ BD находим из ΔABD по теореме косинусов

$$BD = \sqrt{m^2 + n^2 - 2m \cdot n \cdot \cos\alpha}.$$

Ответ: $S_{ABCD} = n \cdot m \cdot \sin\alpha$, $\quad BD = \sqrt{m^2 + n^2 - 2m \cdot n \cdot \cos\alpha}$.

9. Найти площадь круга, описанного около прямоугольника со сторонами 3 см и 4 см.



Дано:

$ABCD$ – прямоугольник,

$AB = 3$ см, $AD = 4$ см.

Найти: $S_{\text{кр}}$.

Решение.

Диагональ прямоугольника является диметром описанной окружности. По теореме Пифагора находим:

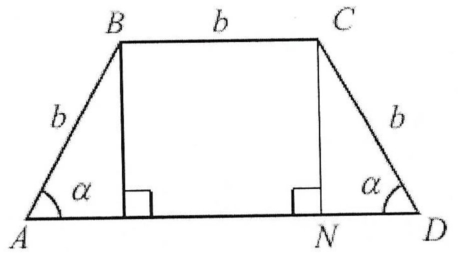
$$BD = \sqrt{AB^2 + AD^2},\ BD = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{25} = 5.$$

Площадь круга радиуса R вычисляется по формуле: $S_{\text{кр}} = \pi R^2$.

Таким образом $S_{\text{кр}} = \pi 5^2 = 25\pi$.

Ответ: $S_{\text{кр}} = 25\pi$ см^2.

10. В равнобедренной трапеции меньшее основание равно боковой стороне b, острый угол равен α. Найти площадь трапеции.



Дано:

$ABCD$ – трапеция,

$AD \| BC$,

$AB = BC = CD = b$,

$\angle A = \angle D = \alpha$.

Найти: S_{ABCD}.

Решение.

$S_{ABCD} = \frac{1}{2}(AD + BC)BH = \frac{1}{2}(AD + b)BH$, где $BH \perp AD$, BH – высота.

Найдем BH и AD.

Рассмотрим ΔABH – прямоугольный.

$\sin\alpha = \frac{BH}{AB}$, откуда $BH = AB\sin\alpha = b\sin\alpha$.

$\cos\alpha = \frac{AH}{AB}$, откуда $AH = AB\cos\alpha = b\cos\alpha$.

$$\Delta ABH = \Delta CND \quad (\angle AHB = \angle CND = 90°, \quad AB = CD, \quad \angle A = \angle D).$$

Отсюда следует, что $AH = ND$, поэтому $ND = b \cdot \cos\alpha$.

$$AD = AH + HN + ND = b\cos\alpha + HN + b\cos\alpha = HN + 2b\cos\alpha,$$

$HN = BC = b$ (так как $HBCN$ – прямоугольник).

$$AD = b + 2b\cos\alpha = b(1 + 2\cos\alpha).$$

Подставляем полученные выражения в формулу для площади:

$$S_{ABCD} = \frac{1}{2}(b(1 + 2\cos\alpha) + b)b\sin\alpha = \frac{1}{2}(2b + 2b\cos\alpha)b\sin\alpha =$$

$$= (b + b\cos\alpha)b\sin\alpha = b^2(1 + \cos\alpha)\sin\alpha.$$

Ответ: $S_{ABCD} = b^2(1 + \cos\alpha)\sin\alpha$.

11. Основанием пирамиды служит прямоугольник со сторонами 6 и 15. Высота пирамиды, равная 4, проходит через точку пересечения диагоналей основания. Найти площадь боковой поверхности пирамиды.

Дано:

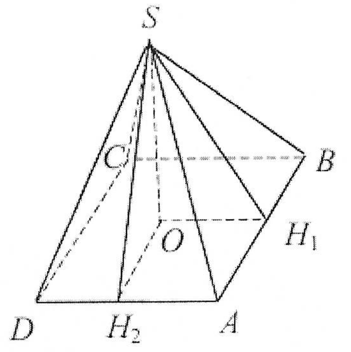
$SABCD$ - пирамида,

$ABCD$ - прямоугольник,

$AB=6,\ AD=15,$

SO – высота пирамиды,

$SO=4$.



Найти: $S_{бок}$.

Решение.

$$S_{бок}=2S_{\Delta ABS}+2S_{\Delta ADS}.$$

Рассмотрим ΔSOH_1, где SH_1 – апофема. По теореме Пифагора

$$SH_1=\sqrt{SO^2+OH_1^2}=\sqrt{4^2+(15/2)^2}=\sqrt{289/4}=17/2=8{,}5.$$

Рассмотрим ΔSOH_2, где SH_2 – апофема. По теореме Пифагора

$$SH_2=\sqrt{SO^2+OH_2^2}=\sqrt{4^2+(6/2)^2}=\sqrt{16+9}=5.$$

$$S_{бок}=2(AB\cdot SH_1/2+AD\cdot SH_2/2)=AB\cdot SH_1+AD\cdot SH_2=6\cdot 8{,}5+15\cdot 5=$$

$$=51+75=126.$$

Ответ: $S_{бок}=126$.

12. Определить площадь боковой поверхности прямой призмы, боковое ребро которой равно b и составляет с диагональю большей боковой грани угол α. В основании призмы лежит прямоугольный треугольник с острым углом β.

Дано:

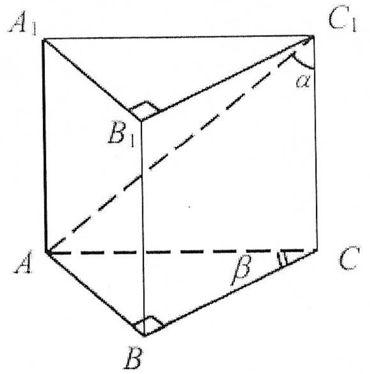
$ABCA_1B_1C_1$ – прямая призма,

$CC_1=b$,

$\angle AC_1C=\alpha$,

$\angle ABC=90^0$,

$\angle ACB=\beta$.



Найти: $S_{бок}$.

Решение.

$$S_{бок}=P_{осн}\,h=(AB+BC+AC)CC_1=(AB+BC+AC)b.$$

Найдем стороны треугольника ABC.

Рассмотрим ΔAC_1C – прямоугольный $\left(\angle C_1CA = 90^0\right)$.

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{AC}{CC_1}, \text{ откуда } AC = CC_1 \operatorname{tg}\alpha = b\operatorname{tg}\alpha.$$

Рассмотрим ΔABC - прямоугольный $\left(\angle ABC = 90^o\right)$.

$\sin\beta = \dfrac{AB}{AC}$, откуда $AB = AC\sin\beta = b\operatorname{tg}\alpha\sin\beta$.

$\cos\beta = \dfrac{BC}{AC}$, откуда $BC = AC\cos\beta = b\operatorname{tg}\alpha\cos\beta$.

Подставим найденные выражения в формулу для площади боковой поверхности.

$$S_{бок} = (b\operatorname{tg}\alpha\sin\beta + b\operatorname{tg}\alpha\cos\beta + b\operatorname{tg}\alpha)b = b^2\operatorname{tg}\alpha(\sin\beta + \cos\beta + 1).$$

Ответ: $S_{бок} = b^2\operatorname{tg}\alpha(\sin\beta + \cos\beta + 1)$.

13. Решить уравнение $6\cos^2 7x - 7\sin 7x - 1 = 0$.

Решение. ОДЗ: $x \in R$.

$$6(1-\sin^2 7x) - 7\sin 7x - 1 = 0, \quad 6 - 6\sin^2 7x - 7\sin 7x - 1 = 0,$$

$$-6\sin^2 7x - 7\sin 7x + 5 = 0, \quad 6\sin^2 7x + 7\sin 7x - 5 = 0.$$

Пусть $\sin 7x = t$, тогда $6t^2 + 7t - 5 = 0$,

$$t_{1,2} = \frac{-7 \pm \sqrt{49 - 4\cdot 6\cdot(-5)}}{12} = \frac{-7 \pm 13}{12}, \quad \text{откуда } t_1 = -\frac{5}{3},\ t_2 = \frac{1}{2}.$$

1) $\sin 7x = -\dfrac{5}{3}$ уравнение не имеет решений, так как $|\sin 7x| \le 1$ для любого $x \in R$.

2) $\sin 7x = \dfrac{1}{2}$, $7x = (-1)^n \arcsin\dfrac{1}{2} + n\pi$, $7x = (-1)^n \dfrac{\pi}{6} + n\pi$,

$x = (-1)^n \dfrac{\pi}{42} + n\dfrac{\pi}{7}$, $n \in Z$. **Ответ:** $x = (-1)^n \dfrac{\pi}{42} + n\dfrac{\pi}{7}$, $n \in Z$.