

**МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ  
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ**  
федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение  
высшего образования  
«Университет «Дубна»  
(государственный университет «Дубна»)

Филиал «Протвино»  
Кафедра «Общеобразовательные дисциплины»

УТВЕРЖДАЮ  
Директор

\_\_\_\_\_/Евсиков А.А./  
*подпись*                      *Фамилия И.О.*

« 30 » июня 2023 г.

**Рабочая программа дисциплины (модуля)**

**Интегральные уравнения и вариационное исчисление**

*наименование дисциплины (модуля)*

Направление подготовки (специальность)

**03.03.02 Физика**

*код и наименование направления подготовки (специальности)*

Уровень высшего образования

**бакалавриат**

*бакалавриат, магистратура, специалитет*

Направленность (профиль) программы (специализация)

**«Медицинская физика»**

Форма обучения

**очная**

*очная, очно-заочная, заочная*

Протвино, 2023

Преподаватель:

Масликов А.А., к.ф.-м.н., доцент, кафедра общеобразовательных дисциплин

*Фамилия И.О., должность, ученая степень, ученое звание, кафедра; подпись*

Рабочая программа разработана в соответствии с требованиями ФГОС ВО по направлению подготовки (специальности) высшего образования

03.03.02 Физика

*(код и наименование направления подготовки (специальности))*

Программа рассмотрена на заседании кафедры общеобразовательных дисциплин

*(название кафедры)*

Протокол заседания №3 от « 29 » июня 2023 г.

Заведующий кафедрой профессор \_\_\_\_\_ Сытин А. Н.

*(Фамилия И.О., подпись)*

СОГЛАСОВАНО

И.о. заведующего выпускающей кафедрой профессор \_\_\_\_\_ Ющенко О.П.

*(Фамилия И.О., подпись)*

« 29 » 06 2023 г.

Эксперт (рецензент):

\_\_\_\_\_  
*(Ф.И.О., ученая степень, ученое звание, место работы, должность; если текст рецензии не прилагается – подпись эксперта (рецензента), заверенная по месту работы)*

## Оглавление

<u>1 Цели и задачи освоения дисциплины</u> .....	<b>Ошибка! Закладка не определена.</b>
<u>2 Место дисциплины в структуре ОПОП</u> .....	<b>Ошибка! Закладка не определена.</b>
<u>3 Планируемые результаты обучения по дисциплине</u> .....	<b>Ошибка! Закладка не определена.</b>
<u>4 Объем дисциплины</u> .....	<b>Ошибка! Закладка не определена.</b>
<u>5. Содержание дисциплины</u> .....	<b>Ошибка! Закладка не определена.</b>
<u>6 Перечень учебно-методического обеспечения по дисциплине</u>	<b>Ошибка! Закладка не определена.</b>
<u>7 Фонды оценочных средств по дисциплине</u> .....	<b>Ошибка! Закладка не определена.</b>
<u>8 Ресурсное обеспечение</u> .....	11
<u>Приложение к рабочей программе дисциплины</u> .....	13

## 1. Цели и задачи освоения дисциплины

**Целью курса** «Интегральные уравнения и вариационное исчисление» Б1.0.10.06 является овладение профессиональной компетенцией ОПК-2 в соответствии с требованиями ФГОС ВО по направлению подготовки бакалавров 03.03.02 «Физика» с учетом направленности бакалаврской программы – «Медицинская физика».

Задачи освоения дисциплины:

- научиться решать интегральные уравнения с помощью точных и приближенных методов;
- научиться применять аппарат вариационного исчисления в задачах физики (в теоретической механике, электродинамике, механике сплошных сред и др.).
- научиться решать вариационные задачи, как путем сведения их к дифференциальным уравнениям, так и прямыми методами;
- приводить задачи физики к интегральным уравнениям или к задачам на нахождение экстремума функционала.

Объектами профессиональной деятельности выпускников, освоивших программу бакалавриата, являются:

- физические системы различного масштаба и уровней организации, процессы их функционирования;
- физические, инженерно-физические, биофизические, химико-физические, медико-физические, природоохранные технологии;
- физическая экспертиза и мониторинг.

## 2. Место дисциплины в структуре ОПОП

Дисциплина «Интегральные уравнения и вариационное исчисление» Б1.0.10.06 относится к основной части блока дисциплин, модуль Б1.0.10 «Математика».

Дисциплина преподается в III семестре II курса. Дисциплина «Интегральные уравнения и вариационное исчисление» опирается на знания, полученные при изучении курсов: «Линейная алгебра и аналитическая геометрия» и «Математический анализ». В результате изучения дисциплины студент должен быть подготовлен к обучению таким курсам «Уравнения математической физики», а также к дисциплинам «Теоретическая физика»: «Теоретическая механика», «Механика сплошных сред» «Электродинамика» и др.

Полученные знания необходимы студентам при решении научно-исследовательских задач в будущей профессиональной деятельности.

## 3. Планируемые результаты обучения по дисциплине

Изучение дисциплины «Интегральные уравнения и вариационное исчисление» направлено на формирование следующих общепрофессиональных компетенций: ОПК-2.

<b>Формируемые компетенции</b> <i>(код и наименование)</i>	<b>Индикаторы достижения компетенций</b> <i>(код и формулировка)</i>	<b>Планируемые результаты обучения по дисциплине</b>
---	---	--

<i>ОПК-1 – Способен применять базовые знания в области физико-математических и (или) естественных наук в сфере своей профессиональной деятельности</i>	ОПК-1.1. Применяет математические, естественнонаучные, социально-экономические и профессиональные знания для решения научно-исследовательских задач	Знать методы решения интегральных уравнений Фредгольма и Вольтерра для решения проблем современной физики
	ОПК-1.2. Применяет системы и методы теоретических оценок и расчетов для экспериментов на ускорителях, реакторах и других ядерно-физических установок	Знать физические и математические модели, основанные на интегральных уравнениях и экстремальных задачах вариационного исчисления для теоретического и экспериментального исследования закономерностей в области физики и медицины

#### 4. Объем дисциплины

Общая трудоемкость дисциплины составляет 4 зачетные единицы, 108 часов, из них 51 час составляет контактная работа обучающихся с преподавателем и 57 часов – самостоятельная работа.

Вид работы	Трудоемкость, часов	
	3 семестр	Всего
<b>Общая трудоемкость</b>	<b>108</b>	<b>108</b>
<b>Контактная работа обучающихся с преподавателем:</b>	<b>51</b>	<b>51</b>
Лекции (Л)	34	34
Практические занятия (ПЗ)	17	17
<b>Самостоятельная работа</b>	<b>57</b>	<b>57</b>
Самоподготовка	23	23
Решение задач	34	34
Вид итогового контроля	<b>Экзамен</b>	<b>Экзамен</b>



### 5. Содержание дисциплины «Интегральные уравнения и вариационное исчисление»

Наименование и краткое содержание разделов и тем дисциплины (модуля)  Форма промежуточной аттестации по дисциплине (модулю)	Всего (часы)	В том числе:											
		Контактная работа (работа во взаимодействии с преподавателем), часы из них <sup>1</sup>								Самостоятельная работа обучающегося, часы, из них			
		Лекционные занятия	Семинарские занятия	Практические занятия	Лабораторные занятия	⋮	Групповые консультации	Индивидуальные консультации	Учебные занятия, направленные на проведение текущего контроля успеваемости (коллоквиумы, практические контрольные занятия и др.)*	Всего	Выполнение домашних заданий	Самоподготовка	Всего
<b>— III — семестр</b>													
Гильбертово пространство и линейные операторы	13	4		2						6	4	3	7
Уравнения Фредгольма второго рода	18	6		3						9	6	3	9
Задача Штурма-Лиувилля	17	6		2						8	6	3	9
Уравнения Вольтерра	17	6		2						8	6	3	9
Корректно и некорректно поставленные задачи	11	3		2						5	3	3	6
Необходимые и достаточные условия экстремума функционала	11	3		2						5	3	3	6
Задачи на условный экстремум	11	3		2						5	3	3	6
Задачи с фиксированной и свободной границей	10	3		2						5	3	2	5
Промежуточная аттестация ___зачет с оценкой___ (указывается форма проведения)**													

<sup>1</sup> Перечень видов учебных занятий уточняется в соответствии с учебным планом.

<b>Итого</b>	108	34		17						51	34	23	57
--------------	-----	----	--	----	--	--	--	--	--	----	----	----	----

## **Содержание дисциплины.**

### **Раздел 1. Гильбертово пространство и линейные операторы.**

- 1) Классификация интегральных уравнений.
- 2) Примеры физических задач, приводящих к интегральным уравнениям.
- 3) Евклидовы, нормированные и метрические пространства.
- 4) Линейные операторы. Норма оператора. Примеры.
- 5) Непрерывные и вполне непрерывные операторы.
- 6) Собственные векторы и собственные значения линейного оператора.
- 7) Собственные векторы и собственные значения вполне непрерывного самосопряженного оператора.

### **Раздел 2. Собственные функции однородного уравнения Фредгольма II рода.**

- 1) Теорема Гильберта-Шмидта.
- 2) Повторные ядра.
- 3) Разложение по собственным функциям.
- 4) Теорема Мерсера.

### **Раздел 3. Задача Штурма-Лиувилля.**

- 1) Свойства собственных функций задачи Штурма-Лиувилля.
- 2) Неоднородное уравнение Фредгольма II рода с симметричным ядром.
- 3) Резольвента.
- 4) Теоремы Фредгольма.
- 5) Уравнения в виде свертки.

### **Раздел 4. Уравнения Вольтерра.**

- 1) Существование и единственность решения уравнения Вольтерра II рода.
- 2) Резольвента для уравнения Вольтерра.
- 3) Применение преобразований Лапласа и Меллина.

### **Раздел 5. Корректно и некорректно поставленные задачи.**

- 1) Некорректно поставленные задачи. Уравнение Фредгольма I рода.
- 2) Сглаживающий функционал.
- 3) Приближенное решение уравнения Фредгольма I рода.
- 4) Численное решение интегральных уравнений.
- 5) Интегро-дифференциальные уравнения.
- 6) Вариационные принципы в физике.

### **Раздел 6. Необходимые и достаточные условия экстремума функционала**

- 1) Вариация функционала и вариационная производная.

- 2) Необходимое условие экстремума функционала.
- 3) Достаточные условия экстремума.

#### **Раздел 7. Задачи на условный экстремум.**

Изопериметрические задачи.

#### **Раздел 8. Задачи с фиксированной и свободной границей.**

- 1) Задачи с подвижными границами. Условия трансверсальности.
- 2) Прямые методы вариационного исчисления.
- 3) Инвариантные вариационные задачи. Теоремы Нётер.

### **6. Перечень учебно-методического обеспечения по дисциплине**

#### **Методические рекомендации преподавателю**

В курсе «Интегральные уравнения и вариационное исчисление» изучается математический аппарат для работы с очень широким кругом задач физики, включающим практически все её разделы. Наряду с дифференциальными уравнениями, интегральными уравнениями могут быть выражены различные физические законы и описаны разные физические явления. Преподавателю рекомендуется постоянно иллюстрировать математические теоремы и определения примерами из физики. Полезно также обращать внимание не только на точные решения, но и на возможности приближенных методов. Особенно полезной будет демонстрация возможностей компьютерных вычислений и по возможности применение визуализации решений.

Промежуточный контроль усвоения студентами полученных знаний осуществляется в виде опросов и обсуждения решения предложенных задач. Итоговый контроль проводится в виде зачета с оценкой.

#### **Методические указания студентам**

При изучении курса «Интегральные уравнения и вариационное исчисление» студенты должны прослушивать лекции и решать задачи, предлагаемые преподавателем на семинарских занятиях и для домашней работы. Весьма желательно использовать методы визуализации решений на компьютере.

Самостоятельная работа должна быть систематической, ритмичной. Для подготовки к каждому практическому занятию студенту рекомендуется самостоятельно повторить материал предыдущей лекции. На решение домашних задач по теме практического занятия отводится две недели. Желательно решать несколько задач в течение недели.

### **7. Фонд оценочных средств для промежуточной аттестации по дисциплине**

Для аттестации обучающихся на соответствие их персональных достижений поэтапным требованиям образовательной программы по дисциплине разработаны фонды оценочных средств, позволяющие оценить результаты обучения (знания, умения, навыки) и сформированные (формируемые) компетенции.

Эти фонды включают теоретические вопросы, типовые практические задания, контрольные работы, домашние работы, тесты, примерные темы курсовых работ (проектов) и критерии их оценивания и иные оценочные материалы, используемые при проведении процедур текущего контроля успеваемости и промежуточной аттестации.

Фонды оценочных средств представлены в приложении к рабочей программе.

При необходимости обучающиеся с ограниченными возможностями здоровья и инвалиды обеспечиваются оценочными материалами в формах, адаптированных к ограничениям их здоровья и восприятия информации:

*Для лиц с нарушениями зрения:*

- в печатной форме увеличенным шрифтом,
- в форме электронного документа,
- в форме аудиофайла.

*Для лиц с нарушениями слуха:*

- в печатной форме,
- в форме электронного документа.

*Для лиц с нарушениями опорно-двигательного аппарата:*

- в печатной форме,
- в форме электронного документа,
- в форме аудиофайла.

## **8. Ресурсное обеспечение**

### **8.1. Перечень литературы**

#### ***Основная учебная литература***

1. Привалов, И. И. Интегральные уравнения [Электронный ресурс]: учебник для вузов / И. И. Привалов. — 4-е изд., стер. — М. : Издательство Юрайт, 2017. — 253 с. — (Серия: Авторский учебник). — ISBN 978-5-534-01552-2. // ЭБС "Юрайт". - URL: <https://biblio-online.ru/book/184D6A5B-3B1F-4873-A671-8F16FFE489E7> (дата обращения: 08.04.2022). Режим доступа: ограниченный по логину и паролю
2. Болдырев, Ю. Я. Вариационное исчисление и методы оптимизации [Электронный ресурс]: учебное пособие для вузов / Ю. Я. Болдырев. — М. : Издательство Юрайт, 2017. — 240 с. — (Серия: Университеты России). — ISBN 978-5-534-01707-6. // ЭБС "Юрайт". - URL: <https://biblio-online.ru/book/9ACC282C-3884-4D46-8397-EAF6AF1DD0FF> (дата обращения: 08.04.2022). - Режим доступа: ограниченный по логину и паролю
3. Петровский И. Г. Лекции по теории интегральных уравнений [Электронный ресурс]/ И.Г. Петровский; Под ред. О.А. Олейник. - 5-е изд. - М.: ФИЗМАТЛИТ, 2009. - 136 с.: 84x108 1/32. - (Классика и современность. Математика). (переплет) ISBN 978-5-9221-1081-5 // ЭБС "Znaniy.com". - URL: <http://znaniy.com/catalog.php?bookinfo=195465> (дата обращения: 08.04.2022). - Режим доступа: ограниченный по логину и паролю

#### ***Дополнительная учебная литература***

1. Васильева, А.Б. Дифференциальные и интегральные уравнения. Вариационное исчисление в примерах и задачах [Электронный ресурс] / А.Б. Васильева, Г.Н. Медведев, Н.А. Тихонов. - М. : Физматлит, 2005. - 214 с. - ISBN 5-9221-0628-7. // ЭБС "Университетская библиотека онлайн" - URL: [http://biblioclub.ru/index.php?page=book\\_red&id=68123&sr=1](http://biblioclub.ru/index.php?page=book_red&id=68123&sr=1) (дата обращения: 08.04.2022). - Режим доступа: ограниченный по логину и паролю
2. Индивидуальные задания по высшей математике: Комплексные числа. Неопределенные и определенные интегралы. Функции нескольких переменных. Обыкновенные интегральные уравнения: Учебное пособие. В 4 ч. Ч. 2. / А.П. Рябушко,

В.В. Бархатов, В.В. Державец, И.Е. Юреть; Под общ. ред. А.П. Рябушко. – 4-е изд. – Минск: Вышэйшая школа, 2009. – 396 с.: ил.

3. Краснов, М.Л. Вариационное исчисление: задачи и упражнения [Электронный ресурс] / М.Л. Краснов, Г.И. Макаренко, А.И. Киселев. - М. : Наука, 1973. - 191 с. ; // ЭБС "Университетская библиотека онлайн" - URL: <http://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=455168> (дата обращения: 08.04.2022). - Режим доступа: ограниченный по логину и паролю
4. Краснов, М.Л. Интегральные уравнения: введение в теорию [Электронный ресурс] / М.Л. Краснов. - М. : Наука, 1975. - 303 с. : ил. ; // ЭБС "Университетская библиотека онлайн" - URL: <http://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=457126> (дата обращения: 08.04.2022). - Режим доступа: ограниченный по логину и паролю
5. Смирнов, В.И. Курс высшей математики [Электронный ресурс]: учебное пособие / В.И. Смирнов. - Изд. 6-е, перераб. и доп. - М. : Наука, 1974. - Т. 4. - Ч. 1. - 336 с.; ЭБС "Университетская библиотека онлайн" - URL: <http://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=459809> (дата обращения: 08.04.2022). - Режим доступа: ограниченный по логину и паролю

#### • Периодические издания

1. Вестник Московского университета. Серия 15. Вычислительная математика и кибернетика: научный журнал / Учредитель: Московский государственный университет – М.: Издательство Московского университета – Журнал основан в 1977 году. – Полные электронные версии статей журнала представлены в в базе данных периодических изданий компании «East View»: <https://dlib.eastview.com/browse/publication/9166/udb/890>
2. Вестник Московского университета. Серия 01. Математика. Механика: научный журнал / Учредитель: Московский государственный университет – М.: Издательство Московского университета гл. ред. В.Н. Чубариков – Журнал основан в 1960 году. – Полные электронные версии статей журнала представлены в базе данных периодических изданий компании «East View»: <https://dlib.eastview.com/browse/publication/9045/udb/890>
3. Вестник Московского государственного областного университета. Серия: физика-математика: научный журнал / Учредитель Московский государственный областной университет Гл. ред. А.С. Бугаев. - Журнал основан в 1998 году – Сайт журнала: <http://vestnik-mgou.ru/Series/PhysicsMathematics> Полные электронные версии статей журнала доступны на сайте научной электронной библиотеки «eLIBRARY.RU»: [https://elibrary.ru/title\\_about.asp?id=25657](https://elibrary.ru/title_about.asp?id=25657)

#### • Перечень ресурсов информационно-телекоммуникационной сети «Интернет»

##### *Электронно-библиотечные системы и базы данных*

1. ЭБС «Znaniium.com»: <http://znaniium.com/>
2. ЭБС «Лань»: <https://e.lanbook.com/>
3. ЭБС «Юрайт»: <https://biblio-online.ru/>
4. ЭБС «Университетская библиотека онлайн»: <http://biblioclub.ru/>
5. Научная электронная библиотека (РУНЭБ) «eLIBRARY.RU»: <http://elibrary.ru>
6. Национальная электронная библиотека (НЭБ): <http://нэб.рф/>
7. Базы данных российских журналов компании «East View»: <https://dlib.eastview.com/>

##### *Научные поисковые системы*

1. Google Scholar - поисковая система по научной литературе. Включает статьи крупных научных издательств, архивы препринтов, публикации на сайтах

университетов, научных обществ и других научных организаций <https://scholar.google.ru/>

2. [SciGuide](http://www.prometeus.nsc.ru/sciguide/page0601.ssi) - навигатор по зарубежным научным электронным ресурсам открытого доступа. <http://www.prometeus.nsc.ru/sciguide/page0601.ssi>
3. [WorldWideScience.org](http://worldwidescience.org/) - глобальная научная поисковая система, которая осуществляет поиск информации по национальным и международным научным базам данных и порталам. <http://worldwidescience.org/>
4. [Math-Net.Ru](http://www.mathnet.ru/) - современная информационная система, предоставляющая российским и зарубежным математикам различные возможности поиска информации о математической жизни в России – <http://www.mathnet.ru/>
5. [ArXiv.org](http://arxiv.org/) - научно-поисковая система, специализируется в областях: компьютерных наук, астрофизики, физики, математики, квантовой биологии. <http://arxiv.org/>

#### ***Профессиональные ресурсы сети «Интернет»***

1. Федеральная информационная система «Единое окно доступа к информационным ресурсам»: <http://window.edu.ru/>
2. Образовательный математический сайт [EXponenta.ru](http://exponenta.ru/default.asp): <http://exponenta.ru/default.asp>
3. Математический сайт [Math.ru](http://math.ru/lib/): <http://math.ru/lib/>
4. Сайт РАН Институт Вычислительной математики: <http://www.inm.ras.ru/>

#### ***Материально-техническое обеспечение дисциплины***

Для проведения практических занятий используются мультимедиа-материалы (презентации, слайды, учебные видеофильмы и т.д.), в связи, с чем требуется оборудование зала видеопроектором, компьютером или ноутбуком, а также аудиоаппаратурой. Дисциплина обеспечена необходимым программным обеспечением, которое находится в свободном доступе (программы Open office).

#### **Приложение к рабочей программе дисциплины**

### **Фонды оценочных средств**

В результате освоения дисциплины «Интегральные уравнения и вариационное исчисление» программы бакалавров по направлению подготовки 03.03.02 «Физика» с учетом направленности бакалаврской программы – «Медицинская физика» выпускник должен обладать следующими компетенциями:

Компетенция **ОПК-1** - Способен применять базовые знания в области физико-математических и (или) естественных наук в сфере своей профессиональной деятельности

---

**ОПК-1. Способен применять базовые знания в области физико-математических и (или)**

**естественных наук в сфере своей профессиональной деятельности**

<b>ИНДИКАТОР ДОСТИЖЕНИЯ КОМПЕТЕНЦИИ</b> (код и наименование)	<b>Критерии оценивания результатов обучения</b> <b>Шкала оценивания</b>				
	<b>1</b>	<b>2</b>	<b>3</b>	<b>4</b>	<b>5</b>
ОПК-1.1 Применяет математические, естественнонаучные, социально-экономические и профессиональные знания для решения научно-исследовательских задач	Отсутствие знаний	Не знает или знает слабо основные приемы, необходимые для использования математического аппарата вариационного исчисления и интегральных уравнений при решении задач в области физики и смежных с ней дисциплинах. Допускает грубые и множественные ошибки.	Удовлетворительно знает способы использования интегральных уравнений вариационных задач при решении проблем в области физики и в смежных с ней дисциплинах, но допускает много неточностей в формулировках.	Имеет хорошее представление о способах использования математического аппарата дисциплины Интегральные уравнения и вариационное исчисление при решении задач в области физики и в смежных с ней дисциплинах. Допускает отдельные ошибки.	Демонстрирует свободное и уверенное знание о способах использования математического аппарата вариационных задач и интегральных уравнений при решении задач в области физики и в смежных с ней дисциплинах. Не допускает ошибки.
ОПК-1. Применяет системы и методы теоретических оценок и расчетов для экспериментов на ускорителях, реакторах и других ядерно-физических установок	Отсутствие знаний	Не знает и не имеет общего представления о физических и математических моделях для теоретического и экспериментального исследования закономерностей в области физики и медицины. Допускает грубые множественные ошибки.	Имеет общее представление о использовании методов вариационного исчисления и интегральных уравнений в физических и математических моделях для теоретического и экспериментального исследования закономерностей в области физики и медицины. Допускает ошибки.	Имеет хорошее представление о физических и математических моделях для теоретического и экспериментального исследования закономерностей в области физики и медицины с использованием математического аппарата	Демонстрирует свободное владение физическими и математическими моделями теоретического и экспериментального исследования закономерностей в области физики и медицины с использованием уравнения Эйлера, интеграль-

				данной дисциплины. Допускает отдельные ошибки.	ных уравнений Фредгольма и Вольтерра. Ошибок не допускает.
--	--	--	--	--	--

Контроль осуществляется в виде устных опросов по материалу лекций, проверки усвоения тем, вынесенных на самостоятельное изучение, разбора решений домашних задач, контрольных работ. По окончании курса проводится зачет с оценкой.

#### **Балльно-рейтинговая система**

Максимальное количество баллов, которые студент может набрать за семестр – 83 балла:

- до 17 баллов за посещаемость;
- до 25 баллов за выполнение каждой из двух контрольных, с учетом качества выполнения,
- до 16 баллов за активную работу на практических занятиях.

Общая сумма баллов	Итоговая оценка
86-100	Отлично
71-85	Хорошо
51-70	Удовлетворительно
0-50	Неудовлетворительно

По результатам работы в семестре студент может получить автоматическую оценку «удовлетворительно» или «хорошо» и может экзамен не сдавать. При желании повысить свою оценку, студент имеет право отказаться от автоматической оценки и сдать экзамен.

Если студент не набрал минимального количества баллов (51 балл) в течение семестра, то он в обязательном порядке сдаёт зачет с оценкой.

Обозначение	№ раздела дисциплины	Содержание самостоятельной работы	Трудоемкость (часы)
ПР-2-1	1-5	Решение задач по теме «Интегральные уравнения»	20
ПР-2-2	6-8	Решение задач по темам «Вариационное исчисление»	14

График выполнения самостоятельных работ студентами

Виды работ	Недели учебного процесса																
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
ПР-2-1	ВЗ											33					
ПР-2-2													ВЗ				33

## Практические задания.

### Задание 1

#### Интегральные уравнения

Вариант 1

200, 209, 236, 26, 46, 116  
 Вариант 2  
 201, 210, 237, 27, 47, 117  
 Вариант 3  
 202, 211, 238, 28, 48, 118  
 Вариант 4  
 203, 212, 239, 29, 49, 119  
 Вариант 5  
 204, 213, 240, 20, 50, 120  
 Вариант 6  
 205, 214, 241, 31, 51, 121  
 Вариант 7  
 206, 215, 242, 32, 52, 122  
 Вариант 8  
 207, 216, 243, 33, 53, 123  
 Вариант 9  
 208, 217, 244, 34, 54, 124

## Задание 2

### Вариационное исчисление

Вариант 1  
 1, 12, 8 (из 2 части), 9 (из 3 части)  
 Вариант 2  
 4, 13, 7 (из 2 части), 8 (из 3 части)  
 Вариант 3  
 5, 14, 6 (из 2 части), 7 (из 3 части)  
 Вариант 4  
 6, 15, 5 (из 2 части), 6 (из 3 части)  
 Вариант 5  
 7, 16, 4 (из 2 части), 5 (из 3 части)  
 Вариант 6  
 8, 17, 3 (из 2 части), 4 (из 3 части)  
 Вариант 7  
 9, 18, 2 (из 2 части), 3 (из 3 части)  
 Вариант 8  
 10, 19, 1 (из 2 части), 2 (из 3 части)  
 Вариант 9  
 2, 11, 20, 1 (из 3 части)

### Часть 1

1. Найти экстремали функционала

$$v[y(x)] = \int_{x_0}^{x_1} \frac{\sqrt{1+y'^2}}{y} dx.$$

2. Исследовать на экстремум функционал

$$v[y(x)] = \int (y^2 + 2xyy') dx; \quad y(x_0) = y_0; \quad y(x_1) = y_1.$$

3. Исследовать на экстремум функционал

$$v[y(x)] = \int_0^1 (xy + y^2 - 2y^2y') dx; \quad y(0) = 1; \quad y(1) = 2.$$

4. Найти экстремали функционала

$$v[y(x)] = \int_{x_0}^{x_1} y'(1 + x^2y') dx.$$

5. Найти экстремали функционала

$$v[y(x)] = \int_{x_0}^{x_1} (y'^2 + 2yy' - 16y^2) dx.$$

6. Найти экстремали функционала

$$v[y(x)] = \int_{x_0}^{x_1} (xy' + y'^2) dx.$$

7. Найти экстремали функционала

$$v[y(x)] = \int_{x_0}^{x_1} \frac{1+y^2}{y'^2} dx.$$

8. Найти экстремали функционала

$$v[y(x)] = \int_{x_0}^{x_1} (y^2 + y'^2 - 2y \sin x) dx.$$

9. Найти экстремали функционала

$$v[y(x)] = \int_{x_0}^{x_1} (16y^2 - y''^2 + x^2) dx.$$

10. Найти экстремали функционала

$$v[y(x)] = \int_{x_0}^{x_1} (2xy + y'''^2) dx.$$

11. Найти экстремали функционала

$$v[y(x), z(x)] = \int_x^{x_1} (2yz - 2y^2 + y'^2 - z'^2) dx.$$

12. Написать уравнение Остроградского для функционала

$$v[z(x, y)] = \int_D \int \left[ \left( \frac{\partial z}{\partial x} \right)^2 - \left( \frac{\partial z}{\partial y} \right)^2 \right] dx dy.$$

13. Написать уравнение Остроградского для функционала

$$v[u(x, y, z)] = \int_D \int \int \left[ \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial u}{\partial z} \right)^2 + 2uf(x, y, z) \right] dx dy dz.$$

14. Найти экстремали функционала

$$v[y(x)] = \int_{x_0}^{x_1} \frac{y'^2}{x^3} dx.$$

15. Найти экстремали функционала

$$v[y(x)] = \int_{x_0}^{x_1} (y^2 + y'^2 + 2ye^x) dx.$$

16. Найти экстремали функционала

$$v[y(x)] = \int_{x_0}^{x_1} (y^2 - y'^2 - 2y \sin x) dx.$$

17. Найти экстремали функционала

$$v[y(x)] = \int_{x_0}^{x_1} \left[ y^2 + (y')^2 + \frac{2y}{\operatorname{ch} x} \right] dx.$$

18. Найти экстремали функционала

$$v[y(x)] = \int_{x_0}^{x_1} [x^2 (y')^2 + 2y^2 + 2xy] dx.$$

19. Найти экстремали функционала

$$v[y(x)] = \int_{x_0}^{x_1} [(y'')^2 - 2(y')^2 + y^2 - 2y \sin x] dx.$$

20. Найти экстремали функционала

$$v[y(x)] = \int_{x_0}^{x_1} [(y''')^2 + y^2 - 2yx^3] dx.$$

## Часть 2.

1. Найти решение с одной угловой точкой в задаче о минимуме функционала

$$v[y(x)] = \int_0^4 (y' - 1)^2 (y' + 1)^2 dx; \quad y(0) = 0; \quad y(4) = 2.$$

2. Существуют ли решения с угловыми точками в задаче об экстремуме функционала

$$v[y(x)] = \int_{x_0}^{x_1} (y'^2 + 2xy - y^2) dx; \quad y(x_0) = y_0; \quad y(x_1) = y_1.$$

3. Существуют ли решения с угловыми точками в задаче об экстремуме функционала

$$v[y(x)] = \int_0^{x_1} (y'^4 - 6y'^2) dx; \quad y(0) = 0; \quad y(x_1) = y_1.$$

4. Найти условие трансверсальности для функционала

$$v[y(x)] = \int_x^{x_1} A(x, y) e^{\operatorname{arctg} y'} \sqrt{1 + y'^2} dx, \quad A(x, y) \neq 0.$$

5. Пользуясь основным необходимым условием экстремума  $\delta v = 0$ , найти функцию, на которой может достигаться экстремум функционала

$$v[y(x)] = \int_0^1 (y''^2 - 2xy) dx; \quad y(0) = y'(0) = 0; \\ y(1) = \frac{1}{120}; \quad y'(1) \text{ — не задано.}$$

6. Найти кривые, на которых может достигаться экстремум функционала

$$v[y(x)] = \int_0^{10} y'^3 dx; \quad y(0) = 0; \quad y(10) = 0.$$

при условии, что допустимые кривые не могут проходить внутри круга, ограниченного окружностью

$$(x - 5)^2 + y^2 = 9.$$

7. Найти функцию, на которой может достигаться экстремум функционала

$$v[y(x)] = \int_0^{\frac{\pi}{4}} (y^2 - y'^2) dx; \quad y(0) = 0.$$

если другая граничная точка может скользить по прямой  $x = \frac{\pi}{4}$ .

8. Пользуясь лишь основным необходимым условием  $\delta v = 0$ , найти кривую, на которой может достигаться экстремум функционала

$$v[y(x)] = \int_0^{x_1} \frac{\sqrt{1 + y'^2}}{y} dx; \quad y(0) = 0,$$

если вторая граничная точка  $(x_1, y_1)$  может перемещаться по окружности  $(x - 9)^2 + y^2 = 9$ .

Часть 3.

Исследовать на экстремум функционалы:

$$1. v[y(x)] = \int_0^2 (xy' + y'^2) dx; \quad y(0) = 1; \quad y(2) = 0.$$

$$2. v[y(x)] = \int_0^a (y'^2 + 2yy' - 16y^2) dx; \quad a > 0; \quad y(0) = 0; \quad y(a) = 0.$$

$$3. v[y(x)] = \int_{-1}^2 y'(1 + x^2 y') dx; \quad y(-1) = 1; \quad y(2) = 4.$$

$$4. v[y(x)] = \int_1^2 y'(1 + x^2 y') dx; \quad y(1) = 3; \quad y(2) = 5.$$

$$5. v[y(x)] = \int_{-1}^2 y'(1 + x^2 y') dx; \quad y(-1) = y(2) = 1.$$

$$6. v[y(x)] = \int_0^{\frac{\pi}{4}} (4y^2 - y'^2 + 8y) dx; \quad y(0) = -1; \quad y\left(\frac{\pi}{4}\right) = 0.$$

$$7. v[y(x)] = \int_1^2 (x^2 y'^2 + 12y^2) dx; \quad y(1) = 1; \quad y(2) = 8.$$

$$8. v[y(x)] = \int_0^1 (y'^2 + y^2 + 2ye^{2x}) dx; \quad y(0) = \frac{1}{3}; \quad y(1) = \frac{1}{3}e^2.$$

$$9. v[y(x)] = \int_0^{\frac{\pi}{4}} (y^2 - y'^2 + 6y \sin 2x) dx; \quad y(0) = 0; \quad y\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1.$$

$$10. v[y(x)] = \int_0^{x_1} \frac{dx}{y'}; \quad y(0) = 0; \quad y(x_1) = y_1; \quad x_1 > 0; \quad y_1 > 0.$$

$$11. v[y(x)] = \int_0^{x_1} \frac{dx}{y'^2}; \quad y(0) = 0; \quad y(x_1) = y_1; \quad x_1 > 0; \quad y_1 > 0.$$

$$12. v[y(x)] = \int_1^2 \frac{x^3}{y'^2} dx; \quad y(1) = 1; \quad y(2) = 4.$$

$$13. v[y(x)] = \int_1^3 (12xy + y'^2) dx; \quad y(1) = 0; \quad y(3) = 26.$$

$$14. v[y(x)] = \int_0^2 [y^2 + (y')^2 - 2xy] dx; \quad y(0) = 0; \quad y(2) = 3.$$

### Вопросы к экзамену по дисциплине «Интегральные уравнения и вариационное исчисление»

- 8) Классификация интегральных уравнений.
- 9) Примеры физических задач, приводящих к интегральным уравнениям.
- 10) Евклидовы, нормированные и метрические пространства.
- 11) Линейные операторы. Норма оператора. Примеры.
- 12) Непрерывные и вполне непрерывные операторы.
- 13) Собственные векторы и собственные значения линейного оператора.
- 14) Собственные векторы и собственные значения вполне непрерывного самосопряженного оператора.
- 15) Собственные функции однородного уравнения Фредгольма II рода.
- 16) Теорема Гильберта-Шмидта.
- 17) Повторные ядра.
- 18) Разложение по собственным функциям.
- 19) Теорема Мерсера.
- 20) Задача Штурма-Лиувилля.
- 21) Свойства собственных функций задачи Штурма-Лиувилля.
- 22) Неоднородное уравнение Фредгольма II рода с симметричным ядром.
- 23) Резольвента.
- 24) Теоремы Фредгольма.
- 25) Уравнения в виде свертки.
- 26) Существование и единственность решения уравнения Вольтерра II рода.

- 27) Резольвента для уравнения Вольтерра.
- 28) Применение преобразований Лапласа и Меллина.
- 29) Некорректно поставленные задачи. Уравнение Фредгольма I рода.
- 30) Сглаживающий функционал.
- 31) Приближенное решение уравнения Фредгольма I рода.
- 32) Численное решение интегральных уравнений.
- 33) Интегро-дифференциальные уравнения.
- 34) Вариационные принципы в физике.
- 35) Вариация функционала и вариационная производная.
- 36) Необходимое условие экстремума функционала.
- 37) Достаточные условия экстремума.
- 38) Задачи на условный экстремум.
- 39) Изопериметрические задачи.
- 40) Задачи с подвижными границами. Условия трансверсальности.
- 41) Прямые методы вариационного исчисления.
- 42) Инвариантные вариационные задачи. Теоремы Нётер.
- 43)

### Примеры задач для контрольной работы.

Решить интегральные уравнения

$$116. \int_0^x \cos(x-t) \varphi(t) dt = \sin x.$$

$$117. \int_0^{\pi} e^{x-t} \varphi(t) dt = \operatorname{sh} x.$$

$$118. \int_0^x (x-t)^{\frac{1}{2}} \varphi(t) dt = x^{\frac{5}{2}}.$$

$$119. \int_0^x e^{2(x-t)} \varphi(t) dt = \sin x.$$

$$120. \int_0^x e^{x-t} \varphi(t) dt = x^2.$$

$$121. \int_0^x \cos(x-t) \varphi(t) dt = x \sin x.$$

$$122. \int_0^x \operatorname{sh}(x-t) \varphi(t) dt = x^2 e^{-x}.$$

$$123. \int_0^x J_0(x-t) \varphi(t) dt = \sin x.$$