

Государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования Московской области
«Университет «Дубна»
(государственный университет «Дубна»)

Филиал «Протвино»
Кафедра «Общеобразовательных дисциплин»



УТВЕРЖДАЮ
Директор
/Евсиков А.А./
подпись
Фамилия И.О.
« 30 » 06 2022 г.

Рабочая программа дисциплины

Интегральные уравнения и вариационное исчисление

наименование дисциплины (модуля)

Направление подготовки (специальность)

03.03.02 Физика

код и наименование направления подготовки (специальности)

Уровень высшего образования

бакалавриат

бакалавриат, магистратура, специалитет

Направленность (профиль) программы (специализация)

«Медицинская физика»

Форма обучения

очная

очная, очно-заочная, заочная

Протвино 2022

1

Преподаватель (преподаватели):

Зюзько Т.Н., доктор, к.т.н., кафедра "Общеобразовательных дисциплин"

Зюзько

(Фамилия И.О., должность, ученая степень, ученое звание, кафедра; подпись)

Рабочая программа разработана в соответствии с требованиями ФГОС ВО по
направлению подготовки (специальности) высшего образования
03.03.02 Физика

(код и наименование направления подготовки (специальности))

Программа рассмотрена на заседании кафедры "Общеобразовательных дисциплин"
(название кафедры)

Протокол заседания №5 от «28» 06 2022 г.

Заведующий кафедрой

Сытин

Сытин А.Н.

(Фамилия И.О., подпись)

СОГЛАСОВАНО

Зав. кафедрой «Техническая физика»

Соколов

Соколов А.А.

(Фамилия И.О., подпись)

Эксперт

(Ф.И.О., ученая степень, ученое звание, место работы, должность)

Оглавление

<u>1 Цели и задачи освоения дисциплины</u>	4
<u>2 Место дисциплины в структуре ОПОП</u>	4
<u>3 Планируемые результаты обучения по дисциплине</u>	4
<u>4 Объем дисциплины</u>	5
<u>5. Содержание дисциплины</u>	6
<u>6 Перечень учебно-методического обеспечения по дисциплине</u>	9
<u>7 Фонды оценочных средств по дисциплине</u>	10
<u>8 Ресурсное обеспечение</u>	11
<u>Приложение к рабочей программе дисциплины</u>	13

1. Цели и задачи освоения дисциплины

Целью курса «Интегральные уравнения и вариационное исчисление» Б1.0.10.06 является овладение профессиональной компетенцией ОПК-2 в соответствии с требованиями ФГОС ВО по направлению подготовки бакалавров 03.03.02 «Физика» с учетом направленности бакалаврской программы – «Медицинская физика».

Задачи освоения дисциплины:

- научиться решать интегральные уравнения с помощью точных и приближенных методов;
- научиться применять аппарат вариационного исчисления в задачах физики (в теоретической механике, электродинамике, механике сплошных сред и др.);
- научиться решать вариационные задачи, как путем сведения их к дифференциальным уравнениям, так и прямыми методами;
- приводить задачи физики к интегральным уравнениям или к задачам на нахождение экстремума функционала.

Объектами профессиональной деятельности выпускников, освоивших программу бакалавриата, являются:

- физические системы различного масштаба и уровней организации, процессы их функционирования;
- физические, инженерно-физические, биофизические, химико-физические, медико-физические, природоохранные технологии;
- физическая экспертиза и мониторинг.

2. Место дисциплины в структуре ОПОП

Дисциплина «Интегральные уравнения и вариационное исчисление» Б1.0.10.06 относится к основной части блока дисциплин, модуль Б1.0.10 «Математика».

Дисциплина преподается в III семестре II курса. Дисциплина «Интегральные уравнения и вариационное исчисление» опирается на знания, полученные при изучении курсов: «Линейная алгебра и аналитическая геометрия» и «Математический анализ». В результате изучения дисциплины студент должен быть подготовлен к обучению таким курсам «Уравнения математической физики», а также к дисциплинам «Теоретическая физика»: «Теоретическая механика», «Механика сплошных сред» «Электродинамика» и др.

Полученные знания необходимы студентам при решении научно-исследовательских задач в будущей профессиональной деятельности.

3. Планируемые результаты обучения по дисциплине

Изучение дисциплины «Интегральные уравнения и вариационное исчисление» направлено на формирование следующих общепрофессиональных компетенций: ОПК-2.

Формируемые компетенции <i>(код и наименование)</i>	Индикаторы достижения компетенций <i>(код и формулировка)</i>	Планируемые результаты обучения по дисциплине
---------------------------------------------------------------	-------------------------------------------------------------------------	------------------------------------------------------

<p><i>ОПК-1 – Способен применять базовые знания в области физико-математических и (или) естественных наук в сфере своей профессиональной деятельности</i></p>	<p>ОПК-1.1. Применяет математические, естественнонаучные, социально-экономические и профессиональные знания для решения научно-исследовательских задач</p>	<p>Знать методы решения интегральных уравнений Фредгольма и Вольтерра для решения проблем современной физики</p>
	<p>ОПК-1.2. Применяет системы и методы теоретических оценок и расчетов для экспериментов на ускорителях, реакторах и других ядерно-физических установок</p>	<p>Знать физические и математические модели, основанные на интегральных уравнениях и экстремальных задачах вариационного исчисления для теоретического и экспериментального исследования закономерностей в области физики и медицины</p>

4. Объем дисциплины

Общая трудоемкость дисциплины составляет 4 зачетные единицы, 108 часов, из них 51 час составляет контактная работа обучающихся с преподавателем и 57 часов – самостоятельная работа.

Вид работы	Трудоемкость, часов	
	3 семестр	Всего
Общая трудоемкость	108	108
Контактная работа обучающихся с преподавателем:	51	51
Лекции (Л)	34	34
Практические занятия (ПЗ)	17	17
Самостоятельная работа	57	57
Самоподготовка	23	23
Решение задач	34	34
Вид итогового контроля	Экзамен	Экзамен

5. Содержание дисциплины «Интегральные уравнения и вариационное исчисление»

Наименование и краткое содержание разделов и тем дисциплины (модуля) Форма промежуточной аттестации по дисциплине (модулю)	Всего (часы)	В том числе:											
		Контактная работа (работа во взаимодействии с преподавателем), часы из них ¹								Самостоятельная работа обучающегося, часы, из них			
		Лекционные занятия	Семинарские занятия	Практические занятия	Лабораторные занятия	⋮	Групповые консультации	Индивидуальные консультации	Учебные занятия, направленные на проведение текущего контроля успеваемости (коллоквиумы, практические контрольные занятия и др.)*	Всего	Выполнение домашних заданий	Самоподготовка	Всего
III семестр													
Гильбертово пространство и линейные операторы	13	4		2						6	4	3	7
Уравнения Фредгольма второго рода	18	6		3						9	6	3	9
Задача Штурма-Лиувилля	17	6		2						8	6	3	9
Уравнения Вольтерра	17	6		2						8	6	3	9
Корректно и некорректно поставленные задачи	11	3		2						5	3	3	6
Необходимые и достаточные условия экстремума функционала	11	3		2						5	3	3	6
Задачи на условный экстремум	11	3		2						5	3	3	6
Задачи с фиксированной и свободной границей	10	3		2						5	3	2	5

¹ Перечень видов учебных занятий уточняется в соответствии с учебным планом.

Промежуточная аттестация ___зачет с оценкой _____ (указывается форма проведения)**													
Итого	108	34		17						51	34	23	57

Содержание дисциплины.

Раздел 1. Гильбертово пространство и линейные операторы.

- 1) Классификация интегральных уравнений.
- 2) Примеры физических задач, приводящих к интегральным уравнениям.
- 3) Евклидовы, нормированные и метрические пространства.
- 4) Линейные операторы. Норма оператора. Примеры.
- 5) Непрерывные и вполне непрерывные операторы.
- 6) Собственные векторы и собственные значения линейного оператора.
- 7) Собственные векторы и собственные значения вполне непрерывного самосопряженного оператора.

Раздел 2. Собственные функции однородного уравнения Фредгольма II рода.

- 1) Теорема Гильберта-Шмидта.
- 2) Повторные ядра.
- 3) Разложение по собственным функциям.
- 4) Теорема Мерсера.

Раздел 3. Задача Штурма-Лиувилля.

- 1) Свойства собственных функций задачи Штурма-Лиувилля.
- 2) Неоднородное уравнение Фредгольма II рода с симметричным ядром.
- 3) Резольвента.
- 4) Теоремы Фредгольма.
- 5) Уравнения в виде свертки.

Раздел 4. Уравнения Вольтерра.

- 1) Существование и единственность решения уравнения Вольтерра II рода.
- 2) Резольвента для уравнения Вольтерра.
- 3) Применение преобразований Лапласа и Меллина.

Раздел 5. Корректно и некорректно поставленные задачи.

- 1) Некорректно поставленные задачи. Уравнение Фредгольма I рода.
- 2) Сглаживающий функционал.
- 3) Приближенное решение уравнения Фредгольма I рода.
- 4) Численное решение интегральных уравнений.
- 5) Интегро-дифференциальные уравнения.
- 6) Вариационные принципы в физике.

Раздел 6. Необходимые и достаточные условия экстремума функционала

- 1) Вариация функционала и вариационная производная.

- 2) Необходимое условие экстремума функционала.
- 3) Достаточные условия экстремума.

Раздел 7. Задачи на условный экстремум.

Изопериметрические задачи.

Раздел 8. Задачи с фиксированной и свободной границей.

- 1) Задачи с подвижными границами. Условия трансверсальности.
- 2) Прямые методы вариационного исчисления.
- 3) Инвариантные вариационные задачи. Теоремы Нётер.

6. Перечень учебно-методического обеспечения по дисциплине

Методические рекомендации преподавателю

В курсе «Интегральные уравнения и вариационное исчисление» изучается математический аппарат для работы с очень широким кругом задач физики, включающим практически все её разделы. Наряду с дифференциальными уравнениями, интегральными уравнениями могут быть выражены различные физические законы и описаны разные физические явления. Преподавателю рекомендуется постоянно иллюстрировать математические теоремы и определения примерами из физики. Полезно также обращать внимание не только на точные решения, но и на возможности приближенных методов. Особенно полезной будет демонстрация возможностей компьютерных вычислений и по возможности применение визуализации решений.

Промежуточный контроль усвоения студентами полученных знаний осуществляется в виде опросов и обсуждения решения предложенных задач. Итоговый контроль проводится в виде зачета с оценкой.

Методические указания студентам

При изучении курса «Интегральные уравнения и вариационное исчисление» студенты должны прослушивать лекции и решать задачи, предлагаемые преподавателем на семинарских занятиях и для домашней работы. Весьма желательно использовать методы визуализации решений на компьютере.

Самостоятельная работа должна быть систематической, ритмичной. Для подготовки к каждому практическому занятию студенту рекомендуется самостоятельно повторить материал предыдущей лекции. На решение домашних задач по теме практического занятия отводится две недели. Желательно решать несколько задач в течение недели.

7. Фонд оценочных средств для промежуточной аттестации по дисциплине

Для аттестации обучающихся на соответствие их персональных достижений поэтапным требованиям образовательной программы по дисциплине разработаны фонды оценочных средств, позволяющие оценить результаты обучения (знания, умения, навыки) и сформированные (формируемые) компетенции.

Эти фонды включают теоретические вопросы, типовые практические задания, контрольные работы, домашние работы, тесты, примерные темы курсовых работ (проектов) и критерии их оценивания и иные оценочные материалы, используемые при проведении процедур текущего контроля успеваемости и промежуточной аттестации.

Фонды оценочных средств представлены в приложении к рабочей программе.

При необходимости обучающиеся с ограниченными возможностями здоровья и инвалиды обеспечиваются оценочными материалами в формах, адаптированных к ограничениям их здоровья и восприятия информации:

Для лиц с нарушениями зрения:

- в печатной форме увеличенным шрифтом,
- в форме электронного документа,
- в форме аудиофайла.

Для лиц с нарушениями слуха:

- в печатной форме,
- в форме электронного документа.

Для лиц с нарушениями опорно-двигательного аппарата:

- в печатной форме,
- в форме электронного документа,
- в форме аудиофайла.

8. Ресурсное обеспечение

8.1. Перечень литературы

Основная учебная литература

1. Привалов, И. И. Интегральные уравнения [Электронный ресурс]: учебник для вузов / И. И. Привалов. — 4-е изд., стер. — М. : Издательство Юрайт, 2017. — 253 с. — (Серия: Авторский учебник). — ISBN 978-5-534-01552-2. // ЭБС "Юрайт". - URL: <https://biblio-online.ru/book/184D6A5B-3B1F-4873-A671-8F16FFE489E7> (дата обращения: 08.04.2022). Режим доступа: ограниченный по логину и паролю
2. Болдырев, Ю. Я. Вариационное исчисление и методы оптимизации [Электронный ресурс]: учебное пособие для вузов / Ю. Я. Болдырев. — М. : Издательство Юрайт, 2017. — 240 с. — (Серия: Университеты России). — ISBN 978-5-534-01707-6. // ЭБС "Юрайт". - URL: <https://biblio-online.ru/book/9ACC282C-3884-4D46-8397-EAF6AF1DD0FF>(дата обращения: 08.04.2022). - Режим доступа: ограниченный по логину и паролю
3. Петровский И. Г. Лекции по теории интегральных уравнений [Электронный ресурс]/ И.Г. Петровский; Под ред. О.А. Олейник. - 5-е изд. - М.: ФИЗМАТЛИТ, 2009. - 136 с.: 84x108 1/32. - (Классика и современность. Математика). (переплет) ISBN 978-5-9221-1081-5 // ЭБС "Znaniy.com". - URL: <http://znanium.com/catalog.php?bookinfo=195465> (дата обращения: 08.04.2022). - Режим доступа: ограниченный по логину и паролю

Дополнительная учебная литература

1. Васильева, А.Б. Дифференциальные и интегральные уравнения. Вариационное исчисление в примерах и задачах [Электронный ресурс] / А.Б. Васильева, Г.Н. Медведев, Н.А. Тихонов. - М. : Физматлит, 2005. - 214 с. - ISBN 5-9221-0628-7. // ЭБС "Университетская библиотека онлайн" - URL: http://biblioclub.ru/index.php?page=book_red&id=68123&sr=1 (дата обращения: 08.04.2022). - Режим доступа: ограниченный по логину и паролю
2. Индивидуальные задания по высшей математике: Комплексные числа. Неопределенные и определенные интегралы. Функции нескольких переменных. Обыкновенные интегральные уравнения: Учебное пособие. В 4 ч. Ч. 2. / А.П. Рябушко, В.В. Бархатов, В.В. Державец, И.Е. Юреть; Под общ. ред. А.П. Рябушко. – 4-е изд. – Минск: Вышэйшая школа, 2009. – 396 с.: ил.

3. Краснов, М.Л. Вариационное исчисление: задачи и упражнения [Электронный ресурс] / М.Л. Краснов, Г.И. Макаренко, А.И. Киселев. - М. : Наука, 1973. - 191 с. ; // ЭБС "Университетская библиотека онлайн" - URL: <http://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=455168> (дата обращения: 08.04.2022). - Режим доступа: ограниченный по логину и паролю
4. Краснов, М.Л. Интегральные уравнения: введение в теорию [Электронный ресурс] / М.Л. Краснов. - М. : Наука, 1975. - 303 с. : ил. ; // ЭБС "Университетская библиотека онлайн" - URL: <http://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=457126> (дата обращения: 08.04.2022). - Режим доступа: ограниченный по логину и паролю
5. Смирнов, В.И. Курс высшей математики [Электронный ресурс]: учебное пособие / В.И. Смирнов. - Изд. 6-е, перераб. и доп. - М. : Наука, 1974. - Т. 4. - Ч. 1. - 336 с.; ЭБС "Университетская библиотека онлайн" - URL: <http://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=459809> (дата обращения: 08.04.2022). - Режим доступа: ограниченный по логину и паролю

• Периодические издания

1. [Вестник Московского университета. Серия 15. Вычислительная математика и кибернетика](#): научный журнал / Учредитель: [Московский государственный университет](#) – М.: Издательство Московского университета – Журнал основан в 1977 году. – Полные электронные версии статей журнала представлены в в базе данных периодических изданий компании «East View»: <https://dlib.eastview.com/browse/publication/9166/udb/890>
2. Вестник Московского университета. Серия 01. Математика. Механика: научный журнал / Учредитель: [Московский государственный университет](#) – М.: Издательство Московского университета гл. ред. В.Н. [Чубариков](#) – Журнал основан в 1960 году. – Полные электронные версии статей журнала представлены в базе данных периодических изданий компании «East View»: <https://dlib.eastview.com/browse/publication/9045/udb/890>
3. Вестник Московского государственного областного университета. Серия: физика-математика: научный журнал / Учредитель [Московский государственный областной университет](#) Гл. ред. А.С. Бугаев. - Журнал основан в 1998 году – Сайт журнала: <http://vestnik-mgou.ru/Series/PhysicsMathematics> Полные электронные версии статей журнала доступны на сайте научной электронной библиотеки «eLIBRARY.RU»: https://elibrary.ru/title_about.asp?id=25657

• Перечень ресурсов информационно-телекоммуникационной сети «Интернет»

Электронно-библиотечные системы и базы данных

1. ЭБС «Znaniium.com»: <http://znaniium.com/>
2. ЭБС «Лань»: <https://e.lanbook.com/>
3. ЭБС «Юрайт»: <https://biblio-online.ru/>
4. ЭБС «Университетская библиотека онлайн»: <http://biblioclub.ru/>
5. Научная электронная библиотека (РУНЭБ) «eLIBRARY.RU»: <http://elibrary.ru>
6. [Национальная электронная библиотека \(НЭБ\)](#): <http://нэб.рф/>
7. Базы данных российских журналов компании «East View»: <https://dlib.eastview.com/>

Научные поисковые системы

1. [Google Scholar](#) - поисковая система по научной литературе. Включает статьи крупных научных издательств, архивы препринтов, публикации на сайтах университетов, научных обществ и других научных организаций <https://scholar.google.ru/>

2. [SciGuide](http://www.prometeus.nsc.ru/sciguide/page0601.ssi) - навигатор по зарубежным научным электронным ресурсам открытого доступа. <http://www.prometeus.nsc.ru/sciguide/page0601.ssi>
3. [WorldWideScience.org](http://worldwidescience.org/) - глобальная научная поисковая система, которая осуществляет поиск информации по национальным и международным научным базам данных и порталам. <http://worldwidescience.org/>
4. [Math-Net.Ru](http://www.mathnet.ru/) - современная информационная система, предоставляющая российским и зарубежным математикам различные возможности поиска информации о математической жизни в России – <http://www.mathnet.ru/>
5. [ArXiv.org](http://arxiv.org/) - научно-поисковая система, специализируется в областях: компьютерных наук, астрофизики, физики, математики, квантовой биологии. <http://arxiv.org/>

Профессиональные ресурсы сети «Интернет»

1. Федеральная информационная система «Единое окно доступа к информационным ресурсам»: <http://window.edu.ru/>
2. Образовательный математический сайт [EXPonenta.ru](http://exponenta.ru/default.asp): <http://exponenta.ru/default.asp>
3. Математический сайт [Math.ru](http://math.ru/lib/): <http://math.ru/lib/>
4. Сайт РАН Институт Вычислительной математики: <http://www.inm.ras.ru/>

Материально-техническое обеспечение дисциплины

Для проведения практических занятий используются мультимедиа-материалы (презентации, слайды, учебные видеофильмы и т.д.), в связи, с чем требуется оборудование зала видеопроектором, компьютером или ноутбуком, а также аудиоаппаратурой. Дисциплина обеспечена необходимым программным обеспечением, которое находится в свободном доступе (программы Open office).

Приложение к рабочей программе дисциплины

Фонды оценочных средств

В результате освоения дисциплины «Интегральные уравнения и вариационное исчисление» программы бакалавров по направлению подготовки 03.03.02 «Физика» с учетом направленности бакалаврской программы – «Медицинская физика» выпускник должен обладать следующими компетенциями:

Компетенция **ОПК-1** - Способен применять базовые знания в области физико-математических и (или) естественных наук в сфере своей профессиональной деятельности

ОПК-1. Способен применять базовые знания в области физико-математических и (или) естественных наук в сфере своей профессиональной деятельности

ИНДИКАТОР ДОСТИЖЕНИЯ КОМПЕТЕНЦИИ (код и наименование)	Критерии оценивания результатов обучения Шкала оценивания				
	1	2	3	4	5
ОПК-1.1 Применяет математические, естественнонаучные, социально-экономические и профессиональные знания для решения научно-исследовательских задач	Отсутствие знаний	Не знает или знает слабо основные приемы, необходимые для использования математического аппарата вариационного исчисления и интегральных уравнений при решении задач в области физики и смежных с ней дисциплинах. Допускает грубые и множественные ошибки.	Удовлетворительно знает способы использования интегральных уравнений вариационных задач при решении проблем в области физики и в смежных с ней дисциплинах, но допускает много неточностей в формулировках.	Имеет хорошее представление о способах использования математического аппарата дисциплины Интегральные уравнения и вариационное исчисление при решении задач в области физики и в смежных с ней дисциплинах. Допускает отдельные ошибки.	Демонстрирует свободное и уверенное знание о способах использования математического аппарата вариационных задач и интегральных уравнений при решении задач в области физики и в смежных с ней дисциплинах. Не допускает ошибки.
ОПК-1. Применяет системы и методы теоретических оценок и расчетов для экспериментов на ускорителях,	Отсутствие знаний	Не знает и не имеет общего представления о физических и математических моделях для теоретического и	Имеет общее представление о использовании методов вариационного исчисления и	Имеет хорошее представление о физических и математических моделях для теоретического и	Демонстрирует свободное владение физическими и математическими моделями теоретического и

реакторах и других ядерно-физических установок		экспериментального исследования закономерностей в области физики и медицины. Допускает грубые множественные ошибки.	интегральных уравнений в физических и математических моделях для теоретического и экспериментального исследования закономерностей в области физики и медицины. Допускает ошибки.	экспериментального исследования закономерностей в области физики и медицины с использованием математического аппарата данной дисциплины. Допускает отдельные ошибки.	экспериментального исследования закономерностей в области физики и медицины с использованием уравнения Эйлера, интегральных уравнений Фредгольма и Вольтерра. Ошибок не допускает.
------------------------------------------------	--	---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------	----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------	----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------	------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------

Контроль осуществляется в виде устных опросов по материалу лекций, проверки усвоения тем, вынесенных на самостоятельное изучение, разбора решений домашних задач, контрольных работ. По окончании курса проводится зачет с оценкой.

Балльно-рейтинговая система

Максимальное количество баллов, которые студент может набрать за семестр – 83 балла:

- до 17 баллов за посещаемость;
- до 25 баллов за выполнение каждой из двух контрольных, с учетом качества выполнения,
- до 16 баллов за активную работу на практических занятиях.

Общая сумма баллов	Итоговая оценка
86-100	Отлично
71-85	Хорошо
51-70	Удовлетворительно
0-50	Неудовлетворительно

По результатам работы в семестре студент может получить автоматическую оценку «удовлетворительно» или «хорошо» и может экзамен не сдавать. При желании повысить свою оценку, студент имеет право отказаться от автоматической оценки и сдать экзамен.

Если студент не набрал минимального количества баллов (51 балл) в течение семестра, то он в обязательном порядке сдаёт зачет с оценкой.

Обозначение	№ раздела дисциплины	Содержание самостоятельной работы	Трудоемкость (часы)
ПР-2-1	1-5	Решение задач по теме «Интегральные уравнения»	20
ПР-2-2	6-8	Решение задач по темам «Вариационное исчисление»	14

График выполнения самостоятельных работ студентами

Виды работ	Недели учебного процесса																
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
ПР-2-1	ВЗ											33					
ПР-2-2													ВЗ				33

Практические задания.

Задание 1

Интегральные уравнения

Вариант 1

200, 209, 236, 26, 46, 116

Вариант 2

201, 210, 237, 27, 47, 117

Вариант 3

202, 211, 238, 28, 48, 118

Вариант 4

203, 212, 239, 29, 49, 119

Вариант 5

204, 213, 240, 20, 50, 120

Вариант 6

205, 214, 241, 31, 51, 121

Вариант 7

206, 215, 242, 32, 52, 122

Вариант 8

207, 216, 243, 33, 53, 123

Вариант 9

208, 217, 244, 34, 54, 124

Задание 2

Вариационное исчисление

Вариант 1

1, 12, 8 (из 2 части), 9 (из 3 части)

Вариант 2

4, 13, 7 (из 2 части), 8 (из 3 части)

Вариант 3

5, 14, 6 (из 2 части), 7 (из 3 части)

Вариант 4

6, 15, 5 (из 2 части), 6 (из 3 части)

Вариант 5

7, 16, 4 (из 2 части), 5 (из 3 части)

Вариант 6

8, 17, 3 (из 2 части), 4 (из 3 части)

Вариант 7

9, 18, 2 (из 2 части), 3 (из 3 части)

Вариант 8

10, 19, 1 (из 2 части), 2 (из 3 части)

Вариант 9

2, 11, 20, 1 (из 3 части)

Часть 1

1. Найти экстремали функционала

$$v[y(x)] = \int_{x_0}^{x_1} \frac{\sqrt{1+y'^2}}{y} dx.$$

2. Исследовать на экстремум функционал

$$v[y(x)] = \int (y^2 + 2xyu') dx; \quad y(x_0) = y_0; \quad y(x_1) = y_1.$$

3. Исследовать на экстремум функционал

$$v[y(x)] = \int_0^1 (xy + y^2 - 2y^2y') dx; \quad y(0) = 1; \quad y(1) = 2.$$

4. Найти экстремали функционала

$$v[y(x)] = \int_{x_0}^{x_1} y' (1 + x^2y') dx.$$

5. Найти экстремали функционала

$$v[y(x)] = \int_{x_0}^{x_1} (y'^2 + 2yy' - 16y^2) dx.$$

6. Найти экстремали функционала

$$v[y(x)] = \int_{x_0}^{x_1} (xy' + y'^2) dx.$$

7. Найти экстремали функционала

$$v[y(x)] = \int_{x_0}^{x_1} \frac{1+y^2}{y'^2} dx.$$

8. Найти экстремали функционала

$$v[y(x)] = \int_{x_0}^{x_1} (y^2 + y'^2 - 2y \sin x) dx.$$

9. Найти экстремали функционала

$$v[y(x)] = \int_{x_0}^{x_1} (16y^2 - y''^2 + x^2) dx.$$

10. Найти экстремали функционала

$$v[y(x)] = \int_{x_0}^{x_1} (2xy + y''^2) dx.$$

11. Найти экстремали функционала

$$v[y(x), z(x)] = \int_x^{x_1} (2yz - 2y^2 + y'^2 - z'^2) dx.$$

12. Написать уравнение Остроградского для функционала

$$v[z(x, y)] = \int_D \int \left[\left(\frac{\partial z}{\partial x} \right)^2 - \left(\frac{\partial z}{\partial y} \right)^2 \right] dx dy.$$

13. Написать уравнение Остроградского для функционала

$$v[u(x, y, z)] = \int_D \int \int \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z} \right)^2 + 2uf(x, y, z) \right] dx dy dz.$$

14. Найти экстремали функционала

$$v[y(x)] = \int_{x_0}^{x_1} \frac{y'^2}{x^3} dx.$$

15. Найти экстремали функционала

$$v[y(x)] = \int_{x_0}^{x_1} (y^2 + y'^2 + 2ye^x) dx.$$

16. Найти экстремали функционала

$$v[y(x)] = \int_{x_0}^{x_1} (y^2 - y'^2 - 2y \sin x) dx.$$

17. Найти экстремали функционала

$$v[y(x)] = \int_{x_0}^{x_1} \left[y^2 + (y')^2 + \frac{2y}{\operatorname{ch} x} \right] dx.$$

18. Найти экстремали функционала

$$v[y(x)] = \int_{x_0}^{x_1} [x^2 (y')^2 + 2y^2 + 2xy] dx.$$

19. Найти экстремали функционала

$$v[y(x)] = \int_{x_0}^{x_1} [(y'')^2 - 2(y')^2 + y^2 - 2y \sin x] dx.$$

20. Найти экстремали функционала

$$v[y(x)] = \int_{x_0}^{x_1} [(y''')^2 + y^2 - 2yx^3] dx.$$

Часть 2.

1. Найти решение с одной угловой точкой в задаче о минимуме функционала

$$v[y(x)] = \int_0^4 (y' - 1)^2 (y' + 1)^2 dx; \quad y(0) = 0; \quad y(4) = 2.$$

2. Существуют ли решения с угловыми точками в задаче об экстремуме функционала

$$v[y(x)] = \int_{x_0}^{x_1} (y'^2 + 2xy - y^2) dx; \quad y(x_0) = y_0; \quad y(x_1) = y_1.$$

3. Существуют ли решения с угловыми точками в задаче об экстремуме функционала

$$v[y(x)] = \int_0^{x_1} (y'^4 - 6y'^2) dx; \quad y(0) = 0; \quad y(x_1) = y_1.$$

4. Найти условие трансверсальности для функционала

$$v[y(x)] = \int_{x_1}^{x_2} A(x, y) e^{\operatorname{arctg} y'} \sqrt{1 + y'^2} dx. \quad A(x, y) \neq 0.$$

5. Пользуясь основным необходимым условием экстремума $\delta v = 0$, найти функцию, на которой может достигаться экстремум функционала

$$v[y(x)] = \int_0^1 (y'^2 - 2xy) dx; \quad y(0) = y'(0) = 0;$$

$$y(1) = \frac{1}{120}; \quad y'(1) \text{ — не задано.}$$

6. Найти кривые, на которых может достигаться экстремум функционала

$$v[y(x)] = \int_0^{10} y'^3 dx; \quad y(0) = 0; \quad y(10) = 0.$$

при условии, что допустимые кривые не могут проходить внутри круга, ограниченного окружностью

$$(x - 5)^2 + y^2 = 9.$$

7. Найти функцию, на которой может достигаться экстремум функционала

$$v[y(x)] = \int_0^{\frac{\pi}{4}} (y^2 - y'^2) dx; \quad y(0) = 0.$$

если другая граничная точка может скользить по прямой $x = \frac{\pi}{4}$.

8. Пользуясь лишь основным необходимым условием $\delta v = 0$, найти кривую, на которой может достигаться экстремум функционала

$$v[y(x)] = \int_0^{x_1} \frac{\sqrt{1 + y'^2}}{y} dx; \quad y(0) = 0,$$

если вторая граничная точка (x_1, y_1) может перемещаться по окружности $(x - 9)^2 + y^2 = 9$.

Часть 3.

Исследовать на экстремум функционалы:

$$1. v[y(x)] = \int_0^2 (xy' + y'^2) dx; \quad y(0) = 1; \quad y(2) = 0.$$

$$2. v[y(x)] = \int_0^a (y'^2 + 2yy' - 16y^2) dx; \quad a > 0; \quad y(0) = 0; \quad y(a) = 0.$$

$$3. v[y(x)] = \int_{-1}^2 y'(1 + x^2 y') dx; \quad y(-1) = 1; \quad y(2) = 4.$$

$$4. v[y(x)] = \int_1^2 y'(1 + x^2 y') dx; \quad y(1) = 3; \quad y(2) = 5.$$

$$5. v[y(x)] = \int_{-1}^2 y'(1 + x^2 y') dx; \quad y(-1) = y(2) = 1.$$

$$6. v[y(x)] = \int_0^{\frac{\pi}{4}} (4y^2 - y'^2 + 8y) dx; \quad y(0) = -1; \quad y\left(\frac{\pi}{4}\right) = 0.$$

$$7. v[y(x)] = \int_1^2 (x^2 y'^2 + 12y^2) dx; \quad y(1) = 1; \quad y(2) = 8.$$

$$8. v[y(x)] = \int_0^1 (y'^2 + y^2 + 2ye^{2x}) dx; \quad y(0) = \frac{1}{3}; \quad y(1) = \frac{1}{3} e^2.$$

$$9. v[y(x)] = \int_0^{\frac{\pi}{4}} (y^2 - y'^2 + 6y \sin 2x) dx; \quad y(0) = 0; \quad y\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1.$$

$$10. v[y(x)] = \int_0^{x_1} \frac{dx}{y^r}; \quad y(0) = 0; \quad y(x_1) = y_1; \quad x_1 > 0; \quad y_1 > 0.$$

$$11. v[y(x)] = \int_0^{x_1} \frac{dx}{y'^2}; \quad y(0) = 0; \quad y(x_1) = y_1; \quad x_1 > 0; \quad y_1 > 0.$$

$$12. v[y(x)] = \int_1^2 \frac{x^3}{y'^2} dx; \quad y(1) = 1; \quad y(2) = 4.$$

$$13. v[y(x)] = \int_1^3 (12xy + y'^2) dx; \quad y(1) = 0; \quad y(3) = 26.$$

$$14. v[y(x)] = \int_0^2 [y^2 + (y')^2 - 2xy] dx; \quad y(0) = 0; \quad y(2) = 3.$$

Вопросы к экзамену по дисциплине «Интегральные уравнения и вариационное исчисление»

- 8) Классификация интегральных уравнений.
- 9) Примеры физических задач, приводящих к интегральным уравнениям.
- 10) Евклидовы, нормированные и метрические пространства.
- 11) Линейные операторы. Норма оператора. Примеры.
- 12) Непрерывные и вполне непрерывные операторы.
- 13) Собственные векторы и собственные значения линейного оператора.
- 14) Собственные векторы и собственные значения вполне непрерывного самосопряженного оператора.
- 15) Собственные функции однородного уравнения Фредгольма II рода.
- 16) Теорема Гильберта-Шмидта.
- 17) Повторные ядра.
- 18) Разложение по собственным функциям.
- 19) Теорема Мерсера.
- 20) Задача Штурма-Лиувилля.
- 21) Свойства собственных функций задачи Штурма-Лиувилля.
- 22) Неоднородное уравнение Фредгольма II рода с симметричным ядром.
- 23) Резольвента.
- 24) Теоремы Фредгольма.
- 25) Уравнения в виде свертки.
- 26) Существование и единственность решения уравнения Вольтерра II рода.

- 27) Резольвента для уравнения Вольтерра.
- 28) Применение преобразований Лапласа и Меллина.
- 29) Некорректно поставленные задачи. Уравнение Фредгольма I рода.
- 30) Сглаживающий функционал.
- 31) Приближенное решение уравнения Фредгольма I рода.
- 32) Численное решение интегральных уравнений.
- 33) Интегро-дифференциальные уравнения.
- 34) Вариационные принципы в физике.
- 35) Вариация функционала и вариационная производная.
- 36) Необходимое условие экстремума функционала.
- 37) Достаточные условия экстремума.
- 38) Задачи на условный экстремум.
- 39) Изопериметрические задачи.
- 40) Задачи с подвижными границами. Условия трансверсальности.
- 41) Прямые методы вариационного исчисления.
- 42) Инвариантные вариационные задачи. Теоремы Нётер.
- 43)

Примеры задач для контрольной работы.

Решить интегральные уравнения

$$116. \int_0^x \cos(x-t) \varphi(t) dt = \sin x.$$

$$117. \int_0^{\pi} e^{x-t} \varphi(t) dt = \operatorname{sh} x.$$

$$118. \int_0^x (x-t)^{\frac{1}{2}} \varphi(t) dt = x^{\frac{5}{2}}.$$

$$119. \int_0^x e^{2(x-t)} \varphi(t) dt = \sin x.$$

$$120. \int_0^x e^{x-t} \varphi(t) dt = x^2.$$

$$121. \int_0^x \cos(x-t) \varphi(t) dt = x \sin x.$$

$$122. \int_0^x \operatorname{sh}(x-t) \varphi(t) dt = x^2 e^{-x}.$$

$$123. \int_0^x J_0(x-t) \varphi(t) dt = \sin x.$$